

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că  $\beta_r > \gamma_r$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\beta_r - \gamma_r)a_r &\geq a_r > \alpha(a_1 + \dots + a_{r-1}) > \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-1} a_{r-1} \\ &\geq (\gamma_1 - \beta_1)a_1 + \dots + (\gamma_{r-1} - \beta_{r-1})a_{r-1}, \end{aligned}$$

și prin urmare  $f(m) > f(n)$ .

**Subiectul 4.** (a) Dacă există o soluție rațională  $x$ , atunci  $x = n + \{x\}$ ,  $\{x\} = \frac{p}{q}$ ,  $0 < p < q$ ,  $n, p, q \in \mathbb{Z}$ , cu  $p$  și  $q$  prime între ele, și  $x\{x\} = k + \alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , deci

$$\alpha = \left(n + \frac{p}{q}\right)\frac{p}{q} - k = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{np - kq}{q}, m = np - kq.$$

Pe de altă parte, pentru  $\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{m}{q}$ , dat fiind că  $p$  și  $q$  sunt prime între ele, există o scriere  $1 = ap - bq$ , cu  $a, b \in \mathbb{Z}$ ; atunci

$$\alpha = \frac{p^2 + mq(ap - bq)}{q^2} = \left(ma + \frac{p}{q}\right)\frac{p}{q} - mb$$

și putem lua  $x = ma + \frac{p}{q}$ .

(b) Să arătăm că  $\alpha = \frac{2004}{2005^2}$  este de forma cerută: avem  $2004 \equiv -1 \pmod{2005}$ , dar  $-1 \equiv 2^2 \pmod{5}$  și  $-1 \equiv 20^2 \pmod{401}$ , deci  $(2 \cdot 401 + 20)^2 = 822^2 \equiv -1 \pmod{2005}$ . Un calcul direct arată că  $822^2 = 337 \cdot 2005 - 1$ , deci  $2004 = 822^2 - 336 \cdot 2005$ , și deci  $\alpha = \left(\frac{822}{2005}\right)^2 - \frac{336}{2005}$ , de unde obținem soluția  $x = 336 \cdot 822 + \frac{822}{2005}$ .

#### CLASA A XI-A

**Subiectul 1.** Dacă  $\det(A) = a \in \mathbb{Q}$  și  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  cu  $X^k = A$ , atunci  $(\det(X))^k = a$ , de unde  $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{Q}$ . Cum  $k$  ia o infinitate de valori, rezultă  $a \in \{0, 1, -1\}$ .

$$\text{Alegem } A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ Pentru } X_{r,k} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{r}{k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

avem  $X_{r,k}^k = A_r$ , deci  $A_r$  este radicală pentru orice  $r \in \mathbb{Q}$ .

(b) Considerăm  $B_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & r \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$  cu  $r \in \mathbb{Q}^*$ .

Dacă  $X^k = B_r$ , atunci  $X^{2k} = O_n$ , de unde rezultă  $X^n = O_n$  și  $k < n$ . Deci, ecuația  $X^k = B_r$  poate avea soluții doar pentru  $k < n$ , de unde rezultă că  $B_r$  nu este radicală pentru orice  $r \in \mathbb{Q}^*$ .

Fie  $C = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$  cu  $r_1, r_2, \dots, r_n$  raționale distincte și cu pro-

dusul 1. Dacă  $X^k = C$  atunci  $CX = XC$ , de unde  $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ .

Rezultă  $x_1^k = r_1, \dots, x_n^k = r_n$ , ceea ce este posibil doar pentru un număr finit de valori ale lui  $k$ .

**Subiectul 2.** (a) Presupunem, prin reducere la absurd, că există  $a \in (0, 1)$  astfel încât funcția  $f_a$  să fie nesurjectivă. Atunci există  $y_0 \in (0, 1)$  astfel încât  $f(x) \neq y_0, \forall x \in (a, 1)$ .

Dar funcția continuă  $f$  are proprietatea lui Darboux pe intervalul  $(a, 1)$ .

Rezultă:

1.  $f(x) < y_0 < 1, \forall x \in (a, 1)$

sau

2.  $f(x) > y_0 > 0, \forall x \in (a, 1)$ .

Pe de altă parte, conform teoremei lui Weierstrass, există  $x_1, x_2 \in [0, a]$  astfel încât:

$$0 < f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) < 1, \quad \forall x \in [0, a].$$

Deducem că, în ambele cazuri (1. sau 2.),  $f$  nu este surjectivă; contradicție.

(b) Un exemplu de funcție care satisface ipoteza:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + x \sin \frac{1}{1-x} \right), \quad x \in [0, 1).$$

**Subiectul 3.** (a)  $\text{Det}(a_{ij})$  nu depinde de enumerarea  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , deoarece orice altă enumerare a submulțimilor nevide ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  este de forma  $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ , unde  $\sigma$  este o permutare a mulțimii  $\{1, 2, \dots, m\}$ , și prin urmare determinantul asociat este  $\text{det}(a_{\sigma(i)\sigma(j)}) = \text{det}(a_{ij})$ .

(b) Vom considera enumerarea  $A_1, A_2, \dots, A_m$  pentru care

$$i = \sum_{a \in A_i} 2^{a-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dacă  $i + j > m$ , atunci  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , deci  $a_{ij} = 1$ ; iar dacă  $i + j = m$ , atunci  $A_i$  și  $A_j$  sunt complementare, deci  $a_{ij} = 0$ . Prin urmare, determinantul este de forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & 0 & 1 \\ * & * & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzând ultima linie din fiecare dintre liniile precedente, determinantul devine

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & -1 & 0 \\ * & * & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(m-1)(m-2)/2} = -1.$$

**Subiectul 4.** (a) Fie  $a_1 < a_2 < x < a < a_3$ . Din convexitate rezultă

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a_3) - f(a)}{a_3 - a},$$

deci

$$(a - x) \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq f(a) - f(x) \leq (a - x) \frac{f(a_3) - f(a)}{a_3 - a},$$

de unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ . Analog  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

(b) Ceea ce se cere este echivalent cu faptul că  $f(a + x) - f(x) = -x$ , ca ecuație în  $x$ , admite o soluție unică  $g(a)$  pentru orice  $a \geq 0$

Să definim  $f_a(x) = f(a + x) - f(x)$  pentru  $a \geq 0$ ;  $f$  fiind convexă, rezultă că  $f_a$  este monoton crescătoare. Considerăm intervalul  $[-|f_a(0)|, |f_a(0)|]$  și funcția  $f_a + \text{id}$ . Atunci

$$f_a(-|f_a(0)|) + (-|f_a(0)|) \leq f_a(0) - |f_a(0)| \leq 0,$$

și

$$f_a(|f_a(0)|) + |f_a(0)| \geq f_a(0) + |f_a(0)| \geq 0.$$

Cum  $f_a + \text{id}$  este continuă, ea se anulează în cel puțin un punct  $x_a$ .

Soluția va fi unică deoarece dacă presupunem Că  $x_1 < x_2$  sunt soluții, avem  $0 = f_a(x_1) + x_1 = f_a(x_2) + x_2$ , deci  $0 \leq f_a(x_2) - f_a(x_1) = x_1 - x_2 < 0$ , absurd.

Așadar, soluția unică  $x_a$  determină, în mod unic funcția  $g$ , cu  $g(a) = x + a$ .

### CLASA A XII-A

**Subiectul 1.** Notăm  $f(1) = a$ ,  $f(i) = b$ . Cum  $f(z + w) = f(z) + f(w)$ , rezultă că pentru orice numere raționale  $x, y$ ,

$$f(x) = ax, \quad f(iy) = by$$

și de aici

$$f(x + iy) = f(x) + f(iy) = ax + by, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Fie acum  $z = x + iy$ , cu  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{Q}$  sunt șiruri convergente la  $x$ , respectiv  $y$ , atunci

$$\begin{aligned} |f(x + iy) - f(x_n + iy_n)| &= |f[(x - x_n) + i(y - y_n)]| \\ &\leq \lambda \cdot |(x - x_n) + i(y - y_n)| = \lambda \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \end{aligned}$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x + iy) - f(x_n + iy_n)| = 0$ .

Cum  $|f(x + iy) - ax - by| \leq |f(x + iy) - f(x_n + iy_n)| + |a||x - x_n| + |b||y - y_n|$ , pentru orice  $n \geq 1$ , rezultă că

$$f(x + iy) = ax + by \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă  $z = x + iy$ , atunci

$$f(z) = a \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)\bar{z}$$

**Subiectul 2.** (a) Fie  $h \in H \setminus \{e\}$ . Există  $h_1 \in H$  astfel încât  $xhx^{-1} = yh_1y^{-1}$ , deci  $h = x^{-1}yh_1(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y}$ . Din ipoteză rezultă că  $x^{-1}y \in H$ .

Invers, dacă  $h \in H$ , atunci  $yh_1y^{-1} = x((x^{-1}y)h(x^{-1}y)^{-1})x^{-1} \in H^x$ , deci  $H^y \subseteq H^x$ . Cum  $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ , în mod analog rezultă că  $H^x \subseteq H^y$ .

(b) Fie  $x, y \in G$  cu  $H^x \neq H^y$  și  $z = xhx^{-1} = yh'y^{-1} \in H^x \cap H^y$ . Cum  $x^{-1}y \in G \setminus H$ , rezultă că  $h = x^{-1}yh'(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y} = \{e\}$ , deci  $z = e$ . Deci  $H^x \cap H^y = \{e\}$ .

Fie  $\mathcal{H} = \{H^x \mid x \in G\}$  și funcția  $f : G \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $f(x) = H^x$ . Cum  $f(x) = f(y)$  dacă și numai dacă  $H^x = H^y$ , dacă și numai dacă  $x^{-1}y \in H$ , dacă și numai dacă  $y \in xH = \{xh \mid h \in H\}$ , rezultă că elementele lui  $G$  au,  $n$  câte  $n$ , aceeași imagine prin  $f$ , deci  $\mathcal{H}$  are  $k = m/n$  elemente.