Subiectul 3. (a) Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(mn) = f(m) + f(n)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul k, există funcţii injective $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{N}$ pentru care $f(mn) = f(m) + f(n)$ pentru orice $m, n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ cu $mn \leqslant k$.

Mihai Bălună, Bucureşti

Subiectul 4. Pentru $\alpha \in (0, 1)$ se consideră ecuaţia $\{x\{x\}\} = \alpha$.

(a) Să se arate că ecuaţia are soluţii raţionale, dacă şi numai dacă există $m, p, q \in \mathbb{Z}$, $0 < p < q$, p şi q prime între ele, astfel încât $\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{m}{q}$.

(b) Să se găsească o soluţie a ecuaţiei pentru $\alpha = \frac{2004}{2005^2}$.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural fixat. Vom numi o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ***radicală*** dacă există o infinitate de numere naturale k, astfel încât ecuaţia $X^k = A$ să aibă soluţii în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

(a) Demonstraţi că dacă A este o matrice radicală atunci $\det A \in \{-1, 0, 1\}$ şi că există o infinitate de matrice radicale care au determinantul 1.

b) Demonstraţi că există o infinitate de matrice care nu sunt radicale şi au determinantul 0, precum şi o infinitate de matrice care nu sunt radicale şi au determinantul 1.

Prelucrare după Gabriel Dospinescu

Subiectul 2. Fie $f : [0, 1) \to (0, 1)$ o funcţie continuă şi surjectivă.

(a) Demonstraţi că, pentru oricare $a \in (0, 1)$, funcţia $f_a : (a, 1) \to (0, 1)$, definită prin $f_a(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (a, 1)$, este surjectivă.

(b) Daţi un exemplu de astfel de funcţie.

Eugen Păltănea, Braşov

Subiectul 3. Fie $X_1, X_2, \cdots, X_m$ o numerotare a celor $m = 2^n - 1$ submulţimi nevide ale mulţimii $\{1, 2, \cdots, n\}$, $n \geqslant 2$. Considerăm matricea $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, unde $a_{ij} = 0$, dacă $X_i \cap X_j = \varnothing$, şi $a_{ij} = 1$, în caz contrar. Demonstraţi că determinantul d al acestei matrice nu depinde de felul în care s-a efectuat numerotarea şi calculaţi d.

* * *

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă.

(a) Demonstraţi că f este continuă.

(b) Demonstraţi că există o funcţie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât

$$f(x + g(x)) = f(g(x)) - g(x)$$

pentru orice $x \geqslant 0$.

Dan Schwarz, Bucureşti

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstraţi că morfismele de grup $f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$ pentru care există λ real pozitiv, astfel încât $|f(z)| \leqslant \lambda|z|$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, sunt de forma

$$f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}, \quad \text{unde } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie G un grup cu m elemente şi H un subgrup propriu al său cu n elemente. Pentru fiecare $x \in G$ notăm

$$H^x = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

şi presupunem că $H^x \cap H = \{e\}$, oricare ar fi $x \in G \setminus H$.

(a) Demonstraţi că $H^x = H^y$ dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$.

(b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{x \in G} H^x$ în funcţie de m şi n.

Călin Popescu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie continuă astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ există şi este finită. Demonstraţi că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t = 0.$$

Radu Miculescu, Bucureşti

Subiectul 4. Fie A un inel cu $2^n + 1$ elemente, unde n este un număr natural nenul şi $M = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, x^k = x, \text{ pentru orice } x \in A\}$.

Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) A este corp;

(b) M este nevidă şi cel mai mic element al său este egal cu $2^n + 1$.

Marian Andronache, Bucureşti