

pentru orice $k \geq 2$. Din inegalitatea Cauchy obținem:

$$\left(\frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_n}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \left(\frac{x_1}{(1+s_1)^2} + \frac{x_2}{(1+s_2)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_n)^2}\right).$$

Dar

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{(1+s_1)^2} + \frac{x_2}{(1+s_2)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_n)^2} \\ & < \frac{x_1}{(1+s_1)} + \frac{x_2}{(1+s_1)(1+s_2)} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_{n-1})(1+s_n)} \\ & = \frac{s_1}{(1+s_1)} + \frac{s_2-s_1}{(1+s_1)(1+s_2)} + \dots + \frac{s_n-s_{n-1}}{(1+s_{n-1})(1+s_n)} \\ & = 1 - \frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_1} - \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_{n-1}} - \frac{1}{1+s_n} \\ & = 1 - \frac{1}{1+s_n} < 1. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\left(\frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_n}\right)^2 < \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right),$$

și deci

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $z_n(t) = x_n(t) + iy_n(t)$ și $z = \cos t + i \sin t$. Putem scrie $z_n(t) = \sum_{k=1}^n k(n-k)z^k$, iar problema cere să arătăm că $z_n(t) = 0$ dacă și numai dacă are loc egalitatea din enunț.

Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \pi \cdot \mathbb{Z}$ astfel încât $z_n(t) \neq 0$. Atunci

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 z^{k-1} = nS_1 = n \sum_{k=1}^n kz^{k-1}.$$

Fie $S_0 = 1 + z + \dots + z^{n-1}$. Deoarece $(1-z)S_2 = 2S_1 - S_0 - n^2z^n$ și $(1-z)S_1 = S_0 - nz^n$, relația de mai sus ne conduce la: $2S_1 - S_0 = nS_0$.

Această ultimă egalitate se transformă în:

$$2(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = (n-1)(1 + z^n).$$

Rescriind ultima relație cu z sub formă trigonometrică, obținem:

$$(n-1) \cos \frac{nt}{2} \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{(n-1)t}{2} \text{ sau echivalent } \operatorname{tg} \frac{nt}{2} = n \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Subiectul 2. Într-un plan oarecare considerăm unghiul $\angle xOy$ congruent cu unghiurile $\angle VA_iA_{i+1}$, iar pe semidreapta Ox segmentul $[OX]$ congruent cu latura poligonului $A_1A_2 \dots A_n$. Pentru fiecare indice $i = 1, 2, \dots, n$, considerăm punctul Y_i pe semidreapta Oy , astfel încât $\triangle Y_iOX \equiv \triangle VA_iA_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1$). Este suficient să demonstrăm că toate punctele Y_i coincid. Să presupunem contrariul. Fie Y_p cel mai apropiat punct de X și Y_q cel mai îndepărtat punct de X .

Întrucât $Y_{i-1}X = VA_i = OY_i$, $i = 2, 3, \dots, n+1$, ($Y_{n+1} = Y_1$), rezultă că

$$|Y_{p-1}X - Y_{q-1}X| = |OY_p - OY_q| = Y_p Y_q > |Y_q X - Y_p X|,$$

în contradicție cu faptul că

$$|Y_q X - Y_p X| = \max\{|Y_i X - Y_j X| : i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Subiectul 3. (a) Pentru orice funcție $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea din enunț $f(1) = 0$, $f(m^2) = 2f(m)$, de unde prin iterare $f(m^k) = kf(m)$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare

$$f(2^{f(3)}) = f(3)f(2) = f(2)f(3) = f(3^{f(2)}),$$

deci f nu poate fi injectivă.

(b) Este clar că f este determinată de valorile sale pe mulțimea $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ a tuturor numerelor prime din mulțimea $\{1, 2, \dots, k\}$ și că $f(1) = 0$.

Fie $\alpha, a_1, a_2, \dots, a_s$ numere întregi astfel încât

$$\alpha > \log_{p_1} k + \log_{p_2} k + \dots + \log_{p_s} k,$$

$a_1 \geq 1$ și $a_i > \alpha(a_1 + \dots + a_{i-1})$, $i = 2, \dots, s$. Definim $f(p_i) = a_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. Deci dacă $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$ este un element din $\{1, 2, \dots, k\}$, atunci $f(m) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_s a_s$.

Vom arăta în continuare că funcția f astfel definită este injectivă. Fie $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$ și $n = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}$ două elemente distincte din $\{1, 2, \dots, k\}$ și $r = \max\{t \mid \beta_t \neq \gamma_t\}$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\beta_r > \gamma_r$. Atunci

$$\begin{aligned} (\beta_r - \gamma_r)a_r &\geq a_r > \alpha(a_1 + \dots + a_{r-1}) > \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-1} a_{r-1} \\ &\geq (\gamma_1 - \beta_1)a_1 + \dots + (\gamma_{r-1} - \beta_{r-1})a_{r-1}, \end{aligned}$$

și prin urmare $f(m) > f(n)$.

Subiectul 4. (a) Dacă există o soluție rațională x , atunci $x = n + \{x\}$, $\{x\} = \frac{p}{q}$, $0 < p < q$, $n, p, q \in \mathbb{Z}$, cu p și q prime între ele, și $x\{x\} = k + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, deci

$$\alpha = \left(n + \frac{p}{q}\right)\frac{p}{q} - k = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{np - kq}{q}, m = np - kq.$$

Pe de altă parte, pentru $\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{m}{q}$, dat fiind că p și q sunt prime între ele, există o scriere $1 = ap - bq$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$; atunci

$$\alpha = \frac{p^2 + mq(ap - bq)}{q^2} = \left(ma + \frac{p}{q}\right)\frac{p}{q} - mb$$

și putem lua $x = ma + \frac{p}{q}$.

(b) Să arătăm că $\alpha = \frac{2004}{2005^2}$ este de forma cerută: avem $2004 \equiv -1 \pmod{2005}$, dar $-1 \equiv 2^2 \pmod{5}$ și $-1 \equiv 20^2 \pmod{401}$, deci $(2 \cdot 401 + 20)^2 = 822^2 \equiv -1 \pmod{2005}$. Un calcul direct arată că $822^2 = 337 \cdot 2005 - 1$, deci $2004 = 822^2 - 336 \cdot 2005$, și deci $\alpha = \left(\frac{822}{2005}\right)^2 - \frac{336}{2005}$, de unde obținem soluția $x = 336 \cdot 822 + \frac{822}{2005}$.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Dacă $\det(A) = a \in \mathbb{Q}$ și $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu $X^k = A$, atunci $(\det(X))^k = a$, de unde $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{Q}$. Cum k ia o infinitate de valori, rezultă $a \in \{0, 1, -1\}$.

$$\text{Alegem } A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ Pentru } X_{r,k} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{r}{k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

avem $X_{r,k}^k = A_r$, deci A_r este radicală pentru orice $r \in \mathbb{Q}$.