

**Subiectul 2.** Să se determine funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care

$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x),$$

oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$  și

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Mihai Piticari, Câmpulung

**Subiectul 3.** Să se arate că pentru orice  $n$  natural nenul există un singur număr natural divizibil cu  $5^n$  care în baza 10 se scrie cu  $n$  cifre din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Vasile Pop, Cluj, și Szász Robert, Tg. Mureș

**Subiectul 4.** Fie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numere strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bogdan Enescu, Buzău

#### CLASA A X-A

**Subiectul 1.** Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$ . Pentru fiecare  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , se consideră numerele

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n k(n-k) \cos(tk) \text{ și } y_n(t) = \sum_{k=1}^n k(n-k) \sin(tk).$$

Arătați că  $x_n(t) = y_n(t) = 0$  dacă și numai dacă

$$\operatorname{tg} \frac{nt}{2} = n \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Constantin Bușe, Timișoara

**Subiectul 2.** Baza  $A_1A_2 \dots A_n$  a piramidei  $VA_1A_2 \dots A_n$  este un poligon regulat. Arătați că dacă

$$\angle VA_1A_2 \equiv \angle VA_2A_3 \equiv \dots \equiv \angle VA_{n-1}A_n \equiv \angle VA_nA_1,$$

atunci piramida este regulată.

\*\*\*

**Subiectul 3.** (a) Să se arate că nu există funcții injective  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  astfel încât  $f(mn) = f(m) + f(n)$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

(b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul  $k$ , există funcții injective  $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{N}$  pentru care  $f(mn) = f(m) + f(n)$  pentru orice  $m, n \in \{1, 2, \dots, k\}$  cu  $mn \leq k$ .

Mihai Băluță, București

**Subiectul 4.** Pentru  $\alpha \in (0, 1)$  se consideră ecuația  $\{x\{x\}\} = \alpha$ .

(a) Să se arate că ecuația are soluții raționale, dacă și numai dacă există  $m, p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < p < q$ ,  $p$  și  $q$  prime între ele, astfel încât  $\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{m}{q}$ .

(b) Să se găsească o soluție a ecuației pentru  $\alpha = \frac{2004}{2005^2}$ .

#### CLASA A XI-A

**Subiectul 1.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural fixat. Vom numi o matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  *radicală* dacă există o infinitate de numere naturale  $k$ , astfel încât ecuația  $X^k = A$  să aibă soluții în  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ .

(a) Demonstrați că dacă  $A$  este o matrice radicală atunci  $\det A \in \{-1, 0, 1\}$  și că există o infinitate de matrice radicale care au determinantul 1.

(b) Demonstrați că există o infinitate de matrice care nu sunt radicale și au determinantul 0, precum și o infinitate de matrice care nu sunt radicale și au determinantul 1.

Prelucrare după Gabriel Dospinescu

**Subiectul 2.** Fie  $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$  o funcție continuă și surjectivă.

(a) Demonstrați că, pentru oricare  $a \in (0, 1)$ , funcția  $f_a : (a, 1) \rightarrow (0, 1)$ , definită prin  $f_a(x) = f(x)$ , pentru orice  $x \in (a, 1)$ , este surjectivă.

(b) Dați un exemplu de astfel de funcție.

Eugen Păltănea, Brașov

**Subiectul 3.** Fie  $X_1, X_2, \dots, X_m$  o numerotare a celor  $m = 2^n - 1$  submulțimi nevide ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ . Considerăm matricea  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ , unde  $a_{ij} = 0$ , dacă  $X_i \cap X_j = \emptyset$ , și  $a_{ij} = 1$ , în caz contrar. Demonstrați că determinantul  $d$  al acestei matrice nu depinde de felul în care s-a efectuat numerotarea și calculați  $d$ .

\* \* \*

**Subiectul 4.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție convexă.