

(b) Aplicând (a) obținem

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{c}{d+2a+b} \geq \frac{2a^2 + 2c^2 + ab + bc + cd + da}{(a+b+c+d)^2}$$

și

$$\frac{b}{c+2d+a} + \frac{d}{a+2b+c} \geq \frac{2b^2 + 2d^2 + ab + bc + cd + da}{(a+b+c+d)^2}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \\ & \geq \frac{(a+b+c+d)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd)}{(a+b+c+d)^2}. \end{aligned}$$

Obținem

$$1 + \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 1.$$

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie $m, n > 0$ astfel ca $\vec{IC} + m\vec{IA} = \vec{0}$ și $\vec{ID} + n\vec{IB} = \vec{0}$. Cum $\{E\} = BC \cap AD$, există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\vec{IE} = a\vec{IC} + (1-a)\vec{IB} = b\vec{ID} + (1-b)\vec{IA},$$

de unde

$$\vec{IE} = -am\vec{IA} + (1-a)\vec{IB} = -bn\vec{IB} + (1-b)\vec{IA}.$$

Deducem

$$b = 1 + am, \quad a = 1 + bn. \tag{1}$$

Triunghiurile ECD și IAB au același centru de greutate dacă și numai dacă

$$\vec{IE} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{IA} + \vec{IB},$$

sau

$$\vec{IE} = (1+m)\vec{IA} + (1+n)\vec{IB}.$$

Rezultă

$$-am = 1 + m, \quad 1 - a = 1 + n. \tag{2}$$

Eliminând a și b din relațiile (1) și (2), obținem $m = n$ și $m^2 = m + 1$, adică

$$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} \quad \text{și} \quad \left(\frac{IC}{IA}\right)^2 = \frac{IC}{IA} + 1,$$

ceea ce este echivalent cu $BC \parallel AD$ și $IC^2 = IA \cdot AC$.

Subiectul 2. Pentru $x \notin \{0, -1\}$, relația se scrie

$$\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}.$$

Notând $f(1) = k$, din această egalitate rezultă prin inducție $f(n) = kn$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Din aceeași relație rezultă $\frac{f(x+n)}{x+n} = \frac{f(x)}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$|f(x+n) - f(y+n)| = \left| \frac{x+n}{x} f(x) - \frac{y+n}{y} f(y) \right| \leq |x-y|$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$. De aici

$$\begin{aligned} & \left| n \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right) \right| = |f(x+n) - f(y+n)| \\ & \leq \left| f(x) - f(y) + n \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right) \right| \leq |x-y| \end{aligned}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$. Cum $n \in \mathbb{N}$ este arbitrar, rezultă $\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} = 0$. Rezultă că există $l \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = lx$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Dacă $x \in \mathbb{Z}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, din ipoteză avem

$$\left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| \leq \frac{1}{n},$$

de unde $\left| lx + \frac{l}{n} - kx \right| \leq \frac{1}{n}$, adică $\left| x(l-k) + \frac{l}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$, care conduce la $l = k$.

În concluzie $f(x) = kx$, cu $k \in \mathbb{R}$ și $|k| \leq 1$.

Variantă. Dacă $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$, obținem

$$\frac{f(x+n)}{x+n} = \frac{f(x)}{x},$$

de unde

$$|f(x+n) - f(y+n)| = \left| \frac{x+n}{x} f(x) - \frac{y+n}{y} f(y) \right| \leq |x-y|,$$

sau

$$\left| f(x) - f(y) + n \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right) \right| \leq |x-y|,$$

oricare ar fi $x, y > 0$ și $n \in \mathbb{N}$. Deducem că există k real astfel încât $f(x) = kx$, pentru orice $x \geq 0$. În mod similar, există l real astfel încât $f(x) = lx$, pentru orice $x < 0$. Alegând $x \in (-1, 0)$, din egalitatea

$$\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$$

obținem $k = l$, deci $f(x) = kx$, pentru orice x real, unde $k \in \mathbb{R}$, cu $|k| \leq 1$.

Subiectul 3. Demonstrația se face prin inducție după n . Fie $A_k, k=1, 2, \dots, n$ numere de câte k cifre, unic determinate, divizibile respectiv cu 5^k .

Pentru $k=1$ avem $A_1 = 5$ iar pentru $k=2$, $A_2 = 25$. Construim numărul A_{n+1} . Notăm $B_n = \frac{A_n}{5^n}$. Un număr de $n+1$ cifre, fie acesta $\overline{c_{n+1}c_n \dots c_1} = c_{n+1}10^n + \overline{c_n \dots c_1}$ se divide cu 5^n dacă și numai dacă $\overline{c_n \dots c_1}$ se divide cu 5^n . Din partea de unicitate a ipotezei de inducție rezultă că $\overline{c_n \dots c_1} = A_n = 5^n B_n$.

Prin urmare $\overline{c_{n+1}c_n \dots c_1} = 5^n(2^n c_{n+1} + B_n)$. Divizibilitatea acestui număr cu 5^{n+1} se reduce la divizibilitatea numărului $2^n c_{n+1} + B_n$ cu 5, altfel spus congruența $2^n x + b \equiv 0 \pmod{5}$ să aibă unică soluție în mulțimea $\{1, 2, \dots, 5\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $b \in \mathbb{N}$.

Aceasta se poate face fie analizând toate cazurile de resturi posibile ale lui b la împărțirea cu 5 sau direct observând că numărul 2^n este inversabil modulo 5.

Subiectul 4. Fie $s_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Observăm că

$$s_1 < s_2 < \dots < s_n \quad \text{și} \quad x_k = s_k - s_{k-1},$$

pentru orice $k \geq 2$. Din inegalitatea Cauchy obținem:

$$\left(\frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_n}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \left(\frac{x_1}{(1+s_1)^2} + \frac{x_2}{(1+s_2)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_n)^2}\right).$$

Dar

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{(1+s_1)^2} + \frac{x_2}{(1+s_2)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_n)^2} \\ & < \frac{x_1}{(1+s_1)} + \frac{x_2}{(1+s_1)(1+s_2)} + \dots + \frac{x_n}{(1+s_{n-1})(1+s_n)} \\ & = \frac{s_1}{(1+s_1)} + \frac{s_2-s_1}{(1+s_1)(1+s_2)} + \dots + \frac{s_n-s_{n-1}}{(1+s_{n-1})(1+s_n)} \\ & = 1 - \frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_1} - \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_{n-1}} - \frac{1}{1+s_n} \\ & = 1 - \frac{1}{1+s_n} < 1. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\left(\frac{1}{1+s_1} + \frac{1}{1+s_2} + \dots + \frac{1}{1+s_n}\right)^2 < \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right),$$

și deci

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_1+\dots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $z_n(t) = x_n(t) + iy_n(t)$ și $z = \cos t + i \sin t$. Putem scrie $z_n(t) = \sum_{k=1}^n k(n-k)z^k$, iar problema cere să arătăm că $z_n(t) = 0$ dacă și numai dacă are loc egalitatea din enunț.

Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \pi \cdot \mathbb{Z}$ astfel încât $z_n(t) \neq 0$. Atunci

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 z^{k-1} = nS_1 = n \sum_{k=1}^n kz^{k-1}.$$

Fie $S_0 = 1 + z + \dots + z^{n-1}$. Deoarece $(1-z)S_2 = 2S_1 - S_0 - n^2z^n$ și $(1-z)S_1 = S_0 - nz^n$, relația de mai sus ne conduce la: $2S_1 - S_0 = nS_0$.