CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că un tetraedru cu vârfurile în mulţimea vârfurilor cubului are volumul $\frac{1}{6}$ dacă şi numai dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei feţe a cubului.

Dinu Şerbănescu, Bucureşti

Subiectul 2. Pentru un număr natural n, scris în baza 10, notăm prin $p(n)$ produsul cifrelor sale.

(a) Să se demonstreze că $p(n) \leqslant n$.

(b) Să se determine numerele naturale n cu proprietatea:

$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$

Eugen Păltănea, Braşov

Subiectul 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv BC, iar unghiul format de dreptele AB' şi BC' are măsura de $60°$. Fie O şi P intersecţiile dreptelor $A'C$ cu AC', respectiv $B'C$ cu $C'N$.

(a) Să se demonstreze că dreapta AC' este perpendiculară pe planul (OPM).

(b) Să se determine măsura unghiului format de dreapta AP cu planul (OPM).

Mircea Fianu, Bucureşti

Subiectul 4. (a) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geqslant \frac{4(uy + vx)}{(x+y)^2},$$

pentru orice numere reale $u, v, x, y > 0$.

(b) Fie $a, b, c, d > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geqslant 1.$$

Traian Tămâian, Carei

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $\{E\} = AD \cap BC$, $\{I\} = AC \cap BD$. Să se arate că triunghiurile EDC şi IAB au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $AB \parallel CD$ şi $IC^2 = IA \cdot AC$.

Virgil Nicula, Bucureşti

Subiectul 2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|\,,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Mihai Piticari, Câmpulung

Subiectul 3. Să se arate că pentru orice n natural nenul există un singur numar natural divizibil cu 5^n care în baza 10 se scrie cu n cifre din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vasile Pop, Cluj, şi Szász Robert, Tg. Mureş

Subiectul 4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bogdan Enescu, Buzău

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie n un număr natural, $n \geqslant 2$. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se consideră numerele

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\cos(tk) \text{ şi } y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\sin(tk).$$

Arătaţi că $x_n(t) = y_n(t) = 0$ dacă şi numai dacă

$$\operatorname{tg}\frac{nt}{2} = n\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Constantin Buşe, Timişoara

Subiectul 2. Baza $A_1A_2\cdots A_n$ a piramidei $VA_1A_2\cdots A_n$ este un poligon regulat. Arătaţi că dacă

$$\angle VA_1A_2 \equiv \angle VA_2A_3 \equiv \cdots \equiv \angle VA_{n-1}A_n \equiv \angle VA_nA_1\,,$$

atunci piramida este regulată.

* * *