

(b) Din (a) deducem că triunghiurile MON și BOA sunt asemenea, deci $m(\angle OMN) = m(\angle OBA)$.

$[OE]$ este mediană în triunghiul MON deci $OE = EM$. Atunci

$$m(\angle EOM) = m(\angle EMO) = m(\angle OBA).$$

Cum $m(\angle MOE) + m(\angle BOE) = 90^\circ$, rezultă că $m(\angle OBA) + m(\angle BOE) = 90^\circ$, deci $OE \perp AB$.

Subiectul 4. Suma celor 2005 perechi de numere este $2 \cdot 7022 = 14044$. Presupunem prin absurd că există cel mult o pereche cu suma numerelor mai mare sau egală cu 8. Atunci cel puțin 2004 perechi au suma elementelor cel mult 7, deci în total $7 \cdot 2004 = 14028$.

Rezultă că există o pereche cu suma $\geq 14044 - 14028 = 16$

Atunci unul dintre numerele din pereche este cel puțin 8.

Acesta formează cu cele două numere vecine două perechi cu suma cel puțin 8, în contradicție cu presupunerea făcută.

CLASA a VIII-A

Subiectul 1. Dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt pe o față a cubului, atunci ele sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel. Al patrulea vârf se află pe fața opusă, la distanța 1 față de baza formată de triunghiul menționat anterior. Rezultă că volumul tetraedrului este $\frac{1}{6}$.

Să presupunem prin absurd că există un tetraedru de volum $\frac{1}{6}$ care nu are vârfurile pe o față a cubului. Fie M un vârf al tetraedrului. Dacă pe fețele ce conțin acest vârf nu s-ar mai afla vârfuri ale tetraedrului, acestea ar putea fi plasate doar în punctul diagonal opus vârfului M , contradicție. Există astfel o față a cubului care are exact două vârfuri ale tetraedrului și, evident, pe fața opusă se vor găsi celelalte două vârfuri ale tetraedrului.

Pentru a stabili notațiile, fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ cele două fețe. Analizăm două cazuri:

(a) Vârfurile tetraedrului de pe fața $ABCD$ sunt capetele unei muchii a cubului, de exemplu A și B . Atunci A' sau B' nu sunt vârfuri ale tetraedrului, altfel fața $ABB'A'$ ar conține trei vârfuri ale tetraedrului. Rezultă că C' și D' sunt vârfuri ale tetraedrului, contradicție.

(b) Vârfurile tetraedrului de pe fața $ABCD$ sunt capetele unei diagonale, de exemplu A și C . Argumentele similare cazului precedent arată că B' și D' sunt celelalte vârfuri ale tetraedrului. Dar $ACB'D'$ este tetraedru regulat de volum $\frac{1}{3}$, de unde rezultă contradicția

În consecință, în condițiile problemei, un tetraedru de volum $\frac{1}{6}$ are trei vârfuri pe o față a cubului.

Subiectul 2. (a) Presupunem că n are $k + 1$ cifre, $k \in \mathbb{N}$, deci

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0,$$

unde a_0, a_1, \dots, a_k sunt cifre.

Avem $p(n) = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_k \leq a_k \cdot 9^k \leq a_k 10^k \leq n$. Rezultă $p(n) \leq n$.

(b) Avem $n^2 + 4n - 2005 \geq 0$, rezultă $n \geq 43$.

Avem $n^2 + 4n - 2005 = 10p(n) \leq 10n$, rezultă $n \leq 47$.

Obținem $n \in \{43, 44, 45, 46, 47\}$. Singurul număr care verifică condiția problemei este $n = 45$.

Subiectul 3. (a) Din $MA = MC'$ și $OA = OC'$ rezultă $MO \perp AC'$

Notăm $AB = a$, $AA' = b$. Dacă D este simetricul lui C față de B , atunci $BDB'C'$ este paralelogram, deci $DB' \parallel BC'$ și $DB' = BC'$. Din $\angle(AB', BC') = 60^\circ$ deducem că triunghiul $AB'D$ este echilateral. Din $AB' = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $AD = a\sqrt{3}$, obținem $b = a\sqrt{2}$.

În triunghiul ANC' avem $AC' = a\sqrt{3}$, $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $\angle N = 90^\circ$ ($AN \perp (BCC')$) deci $\angle AC'N = 30^\circ$. Triunghiurile $C'PB'$ și NPC sunt asemenea și $CN = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}C'B'$, deci $C'P = \frac{2}{3}C'N = a$. Deducem că triunghiul $C'OP$, cu $m(\widehat{C}) = 30^\circ$, $C'P = a$, $OC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, este triunghi dreptunghic în O

Relațiile $AC' \perp OM$ și $AC' \perp OP$ implică $AC' \perp (OPM)$

(b) Proiecția dreptei AP pe planul (OPM) este dreapta OP (conform (a)), deci $\angle(AP, (OPM)) = \angle APO$; $\operatorname{tg} \widehat{APO} = \frac{AO}{OP} = \sqrt{3}$, de unde rezultă că $\angle APO = 60^\circ$

Subiectul 4. (a) Din inegalitatea $(x + y)^2 \geq 4xy$ obținem

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}.$$

Atunci

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy + vx}{xy} \geq \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2}.$$

(b) Aplicând (a) obținem

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{c}{d+2a+b} \geq \frac{2a^2 + 2c^2 + ab + bc + cd + da}{(a+b+c+d)^2}$$

și

$$\frac{b}{c+2d+a} + \frac{d}{a+2b+c} \geq \frac{2b^2 + 2d^2 + ab + bc + cd + da}{(a+b+c+d)^2}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \\ & \geq \frac{(a+b+c+d)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd)}{(a+b+c+d)^2}. \end{aligned}$$

Obținem

$$1 + \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 1.$$

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie $m, n > 0$ astfel ca $\vec{IC} + m\vec{IA} = \vec{0}$ și $\vec{ID} + n\vec{IB} = \vec{0}$. Cum $\{E\} = BC \cap AD$, există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\vec{IE} = a\vec{IC} + (1-a)\vec{IB} = b\vec{ID} + (1-b)\vec{IA},$$

de unde

$$\vec{IE} = -am\vec{IA} + (1-a)\vec{IB} = -bn\vec{IB} + (1-b)\vec{IA}.$$

Deducem

$$b = 1 + am, \quad a = 1 + bn. \tag{1}$$

Triunghiurile ECD și IAB au același centru de greutate dacă și numai dacă

$$\vec{IE} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{IA} + \vec{IB},$$

sau

$$\vec{IE} = (1+m)\vec{IA} + (1+n)\vec{IB}.$$

Rezultă

$$-am = 1 + m, \quad 1 - a = 1 + n. \tag{2}$$

Eliminând a și b din relațiile (1) și (2), obținem $m = n$ și $m^2 = m + 1$, adică

$$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} \quad \text{și} \quad \left(\frac{IC}{IA}\right)^2 = \frac{IC}{IA} + 1,$$

ceea ce este echivalent cu $BC \parallel AD$ și $IC^2 = IA \cdot AC$.