A 56-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
SOLUŢII

CLASA A VII-A

Subiectul 1. (a) Triunghiul MAD este isoscel cu $AM = DM$, deci $\angle MAD = \angle MDA$. Deoarece EF este paralelă cu AD rezultă $\angle MAD = \angle MFE$ şi $\angle MDA = \angle MEF$. Rezultă că triunghiul MEF este isoscel cu $ME = MF$. Atunci $AF = DE$, ca sume sau diferenţe de segmente congruente.

(b) Cum $\angle DEC = \angle MDA = \angle EDC$, rezultă că triunghiurile DEC şi DAM sunt asemenea; deci $\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DM}$, adică $DA \cdot DC = DM \cdot DE$. De aici obţinem $AD \cdot AB = DM \cdot DE$, ceea ce trebuia demonstrat.

Subiectul 2. (a) $13 | 2a + 3b$ dacă şi numai dacă $13 | 2a + 3b + 13b - 26a = 8(2b - 3a)$.

Deoarece 8 şi 13 sunt prime între ele rezultă concluzia.

(b) Avem $(2a + 3b)(2b + 3a) = 13ab + 6(a^2 + b^2)$.

Cum 13 divide $a^2 + b^2$, rezultă că 13 divide produsul $(2a + 3b)(2b + 3a)$. Deoarece 13 este număr prim, rezultă că 13 divide $2a + 3b$ sau $2b + 3a$.

Subiectul 3. (a) Aplicând teorema înălţimii în triunghiurile ANC şi BMD obţinem $ON^2 = OA \cdot OC$ şi $OM^2 = OB \cdot OD$.

Din asemănarea triunghiurilor AOB şi COD deducem că

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC},$$

de unde $OA^2 = \frac{AB^2 \cdot OC^2}{DC^2}$ şi $OB^2 = \frac{AB^2 \cdot OD^2}{DC^2}$. Avem

$$\frac{ON^2}{OA^2} = \frac{DC}{AB} \quad \text{şi} \quad \frac{OM^2}{OB^2} = \frac{DC}{AB};$$

În plus unghiul $\angle MOP$ este comun, deci rezultă că triunghiurile MON şi OBA sunt asemenea.

(b) Din (a) deducem că triunghiurile MON şi BOA sunt asemenea, deci $m(\angle OMN) = m(\angle OBA)$.

$[OE]$ este mediană în triunghiul MON deci $OE = EM$. Atunci

$$m(\angle EOM) = m(\angle EMO) = m(\angle OBA).$$

Cum $m(\angle MOE) + m(\angle BOE) = 90^\circ$, rezultă că $m(\angle(OBA) + m(\angle BOE) = 90^\circ$, deci $OE \perp AB$.

Subiectul 4. Suma celor 2005 perechi de numere este $2 \cdot 7022 = 14044$. Presupunem prin absurd că există cel mult o pereche cu suma numerelor mai mare sau egală cu 8. Atunci cel puţin 2004 perechi au suma elementelor cel mult 7, deci în total $7 \cdot 2004 = 14028$.

Rezultă că există o pereche cu suma $\geqslant 14044 - 14028 = 16$

Atunci unul dintre numerele din pereche este cel puţin 8.

Acesta formează cu cele două numere vecine două perechi cu suma cel puţin 8, în contradiţie cu presupunerea făcută.

CLASA a VIII-A

Subiectul 1. Dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt pe o faţă a cubului, atunci ele sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel. Al patrulea vârf se află pe faţa opusă, la distanţa 1 fată de baza formată de triunghiul menţionat anterior. Rezultă că volumul tetraedrului este $\frac{1}{6}$.

Să presupunem prin absurd că există un tetraedru de volum $\frac{1}{6}$ care nu are vârfurile pe o faţă a cubului. Fie M un vârf al tetraedrului. Dacă pe feţele ce conţin acest vârf nu s-ar mai afla vârfuri ale tetraedrului, acestea ar putea fi plasate doar în punctul diagonal opus vârfului M, contradicţie. Există astfel o faţă a cubului care are exact doua vârfuri ale tetraedrului şi, evident, pe faţa opusă se vor găsi celelalte doua vârfuri ale tetraedrului.

Pentru a stabili notaţiile, fie $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ cele doua feţe. Analizăm două cazuri:

(a) Vârfurile tetraedrului de pe faţa $ABCD$ sunt capetele unei muchii a cubului, de exemplu A şi B. Atunci A' sau B' nu sunt vârfuri ale tetraedrului, altfel faţa $ABB'A'$ ar conţine trei vârfuri ale tetraedrului. Rezultă că C' şi D' sunt vârfuri ale tetraedrului, contradicţie.

(b) Vârfurile tetraedrului de pe faţa $ABCD$ sunt capetele unei diagonale, de exemplu A şi C. Argumentele similare cazului precedent arată că B' si D' sunt celelalte vârfuri ale tetraedrului. Dar $ACB'D'$ este tetraedru regulat de volum $\dfrac{1}{3}$, de unde rezultă contradicţia