

## A 56-A OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Bistrița, 29 martie 2005

### CLASA A VII-A

**Subiectul 1.** Fie  $ABCD$  un paralelogram. Bisectoarea unghiului  $\angle ADC$  intersectează dreapta  $BC$  în  $E$ , iar mediatoarea laturii  $AD$  intersectează dreapta  $DE$  în punctul  $M$ . Fie  $F$  intersecția dreptelor  $AM$  și  $BC$ . Să se arate că:

- (a)  $DE = AF$ ;
- (b)  $AD \cdot AB = DE \cdot DM$ .

Daniela și Marius Lobază, Timișoara

**Subiectul 2.** Fie  $a$  și  $b$  două numere întregi. Să se arate că:

- (a) 13 divide  $2a + 3b$  dacă și numai dacă 13 divide  $2b - 3a$ ;
- (b) Dacă 13 divide  $a^2 + b^2$ , atunci 13 divide  $2a + 3b$  sau  $2b + 3a$ .

Mircea Fianu, București

**Subiectul 3.** Fie  $ABCD$  un trapez cu bazele  $AB$  și  $CD$ , având diagonalele perpendiculare în  $O$ . Pe semidreptele  $(OA$  și  $(OB$  se consideră punctele  $M$  și respectiv  $N$  astfel încât unghiurile  $\angle ANC$  și  $\angle BMD$  să fie drepte. Notăm cu  $E$  mijlocul segmentului  $MN$ . Să se arate că:

- (a) Triunghiurile  $OMN$  și  $OBA$  sunt asemenea.
- (b) Dreapta  $OE$  este perpendiculară pe dreapta  $AB$ .

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

**Subiectul 4.** Pe o circumferință se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală decât 8.

Prelucrare după Marin Chirciu, Pitești