Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Considerăm o prismă cu 6 feţe, astfel încât 5 dintre feţele sale sunt patrulatere circumscriptibile. Să se arate că toate feţele prismei sunt patrulatere circumscriptibile.

Soluţie. Este evident că feţele prismei sunt patrulatere.

Un paralelogram este circumscriptibil dacă şi numai dacă este romb. . . . . 2 puncte

Cele 4 feţe laterale ale prismei sunt paralelograme. Cum măcar 3 dintre acestea sunt circumscriptibile, rezultă că acestea sunt romburi, având latura egală cu muchia laterală m a prismei. . . . . 2 puncte

Bazele prismei sunt patrulatere cu 3 laturi egale cu m. Deoarece cel puţin una este patrulater circumscriptibil rezultă că şi a patra latură este egală cu m, adică bazele sunt romburi. . . . . 2 puncte

În consecinţă toate muchiile prismei sunt egale şi toate feţele sunt romburi, deci patrulatere circumscriptibile. . . . . 1 punct

Subiectul 2. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că există un număr natural k, $k \geq 2$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{-1, 1\}$ astfel încât

$$n = \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j.$$

(membrul drept semnifică suma $a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_k + a_2a_3 + \ldots + a_2a_k + \ldots + a_{k-1}a_k$.)

Soluţie. Folosind identitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j,$$

cerinţa revine la a determina $k \geq 2$ natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{-1, 1\}$ astfel încât $2n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 - k$. 2puncte

Fie m numărul de 1 din secvenţa $a_1, a_2, \ldots, a_k$ şi $p = k - m$ numărul de -1 din aceeaşi secvenţă. Avem $2n = (m - p)^2 - k$, sau, notând

$l = m - p$, $2n = l^2 + l - 2m$. Prin urmare, trebuie să aflăm $l, m \in \mathbb{N}$ cu această proprietate. .... 2 puncte

Alegem $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$ cu $l^2 + l \geq 2n$ şi $m = \frac{l^2+l-2n}{2} \in \mathbb{N}$. .. 2 puncte

Atunci $k = -l + 2m = l^2 - 2n$ satisface cerinţa, cu $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ şi restul -1. .... 1 punct

Subiectul 3. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub şi P un punct variabil pe muchia $[AB]$. Planul perpendicular în P pe AB intersectează dreapta AC' în punctul Q. Notăm M şi N mijloacele segmentelor $A'P$ şi respectiv BQ.

a) Să se arate că dreptele MN şi BC' sunt perpendiculare dacă şi numai dacă P este mijlocul lui AB.

b) Să se determine valoarea minimă a unghiului dintre dreptele MN şi BC'.

Soluţie.

a) Fie O centrul pătratului $BCC'B'$. Dacă P este mijlocul segmentului AB, atunci Q este mijlocul segmentului AC', deci $PBOQ$ este paralelogram. .... 1 punct

Înseamnă că punctele P, N şi O sunt coliniare, deci MN este linie mijlocie în triunghiul $A'PO$, adică MN şi $A'O$ sunt paralele. Cum triunghiul $A'BC'$ este echilateral, obţinem că $A'O \perp BC'$, deci $MN \perp BC'$. .... 1 punct

Reciproc, dacă MN este perpendiculară pe BC', cum şi BC' este perpendiculară pe $A'O$ rezultă $A'O \parallel MN$ sau $BC' \perp (A'OP)$. Dar BC' nu este perpendiculară pe OP, deci rămâne doar cazul $A'O \parallel MN$. De aici rezultă că N este mijlocul lui OP. .... 1 punct

Deducem că $PBOQ$ este paralelogram, adică OQ este linie mijlocie în triunghiul ABC'. Cum Q este mijlocul lui AC', rezultă că P este mijlocul lui AB. .... 1 punct

b) Fie U punctul de intersecţie al paralelei prin Q la AB cu dreapta BC'. Cum $QPBU$ este paralelogram, rezultă că $PN = NU$, deci MN este linie mijlocie în triunghiul $A'PU$. .... 1 punct

Prin urmare, unghiul determinat de MN cu BC' este egal cu unghiul format de $A'U$ cu BC'. .... 1 punct

Cum triunghiul $A'BC'$ este echilateral, deducem că unghiul format de ceviana $A'U$ cu latura BC' este cel puţin egal cu $60°$, cu egalitate pentru $P = A$ sau $P = B$. .... 1 punct

Subiectul 4. Fie $a, b, c \in [\frac{1}{2}, 1]$. Să se arate că

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3.$$

Soluţie. Vom arăta mai întâi inegalitatea din stânga. Deoarece

$a, b \geq \frac{1}{2}$, rezultă că $a + b \geq 1$, deci

$$\frac{a+b}{1+c} \geq \frac{a+b}{a+b+c}.$$

....2 puncte

Sumând împreună cu celelalte 2 inegalităţi analoage obţinem

$$2 = \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{a+b+c} \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b}.$$

....2 puncte

(Altfel, se arată că $\frac{a+b}{1+c} \geq \frac{a+b}{3c}$, deoarece $2c \geq 1$. Concluzia rezultă din sumarea relaţiilor analoage.)

Pentru demonstrarea inegalităţii din dreapta, scriem suma ca

$$\sum\left(\frac{a}{1+c} + \frac{c}{1+a}\right).$$

Deoarece $a, c \leq 1$ avem $\frac{a}{1+c} \leq \frac{a}{a+c}$ şi $\frac{c}{1+a} \leq \frac{c}{c+a}$, deci

$$\frac{a}{1+c} + \frac{c}{1+a} \leq \frac{a}{a+c} + \frac{c}{c+a} = 1.$$

....2 puncte

(Altfel, $\frac{a}{1+c} + \frac{c}{1+a} \leq 1$ este echivalentă cu $a^2 + c^2 \leq 1 + ac$, inegalitate ce se demonstrează de exemplu considerând ordonarea $a \leq c \leq 1$.)

Sumând împreună cu relaţiile analoage rezultă concluzia. 1 punct