Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A VII-A

Subiectul 1.
Considerăm ABC un triunghi şi punctele M şi N aparţin laturilor AB, respectiv BC astfel încât $\frac{2 \cdot CN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Fie P un punct pe dreapta AC. Să se arate că dreptele MN şi NP sunt perpendiculare dacă şi numai dacă PN este bisectoarea unghiului $\angle MPC$.

Soluţie. Fie T punctul de intersecţie al paralelei prin N la AC cu dreapta AB. Din $\frac{CN}{BC} = \frac{AT}{AB}$ rezultă $AM = 2 \cdot AT$, deci T este mijlocul segmentului AM. .... 3 puncte

Notăm cu Q intersecţia dreptelor MN şi AC. Rezultă că în triunghiul PMQ punctul N este mijlocul segmentului MQ.
.... 2 puncte

În triunghiul PMQ, PN este mediană, deci PN este perpendiculară pe MN dacă şi numai dacă PN este bisectoarea unghiului $\angle MPC$.
.... 2 puncte

Subiectul 2. Un pătrat de latură n este format din n^2 pătrate unitate, fiecare colorat cu roşu, galben sau verde. Să se determine n minim astfel încât, pentru orice colorare, să existe o linie şi o coloană cu cel puţin trei pătrate unitate colorate identic (aceeaşi culoare pe linia şi pe coloana găsite).

Soluţie. Numărul minim este 7.

Pentru $n = 7$ cel puţin 17 pătrate unitate au aceeaşi culoare, conform principiului cutiei ($49 = 3 \cdot 16 + 1$.) .... 2 puncte

Deoarece $17 = 7 \cdot 2 + 3$, rezultă din acelaşi principiu că printre cele 7 linii există una care conţine trei pătrate de aceeaşi culoare. Acelaşi raţionament rămâne valabil pentru coloane. .... 3 puncte

Faptul că afirmaţia nu este adevărată pentru $n = 6$ rezultă din următorul exemplu. . . . . 1 punct

$$\begin{array}{cccccc}
r & g & a & r & g & a \\
g & a & r & q & a & r \\
a & r & g & a & r & g \\
r & g & a & r & g & a \\
g & a & r & g & a & r \\
a & r & g & a & r & g
\end{array}$$

Tot de aici, luând subtabele ale celui de mai sus, se vede că pentru orice $n \leq 6$ afirmaţia e falsă. . . . . 1 punct

Subiectul 3. Triunghiul ascuţitunghic ABC are unghiul C cu măsura de $45°$. Punctele A_1 şi B_1 sunt picioarele înălţimilor din A şi B, iar H este ortocentrul triunghiului. Considerăm punctele D şi E situate pe segmentele AA_1 şi BC cu proprietatea că $A_1D = A_1E = A_1B_1$. Să se demonstreze că:

a) $A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2+A_1C^2}{2}}$;

b) $CH = DE$.

Soluţie. a) Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, vom avea $\angle ABC > 45°$, deci mijlocul M al segmentului BC este situat pe (A_1C) 1 punct

Avem $B_1M = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{A_1B + A_1C}{2}$ şi $A_1M = MB - A_1B = \dfrac{BC}{2} - A_1B = \dfrac{A_1C - A_1B}{2}$.

. . . . 1 punct

În triunghiul dreptunghic MA_1B_1 avem $A_1B_1^2 = A_1M^2 + B_1M^2 =$

$$\left(\frac{A_1B + A_1C}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_1C - A_1B}{2}\right)^2 = \frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2},$$

deci

$$A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}}.$$

. . . . 2 puncte

b) Triunghiul DA_1E este dreptunghic isoscel, deci vom avea succesiv

$DE = A_1E \cdot \sqrt{2} = A_1B_1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{A_1B^2 + A_1C^2} = \sqrt{A_1B^2 + A_1A^2} = AB$. . . . . 2 puncte

Din congruenţa triunghiurilor AA_1B şi CA_1H rezultă că $AB = CH$, prin urmare $CH = DE$. . . . . 1 punct

Subiectul 4. Fie A o mulţime de numere naturale nenule cu cel puţin 2 elemente. Se ştie că pentru orice numere $a, b \in A$, $a > b$, avem $\frac{[a,b]}{a-b} \in A$. Să se arate că mulţimea A are exact 2 elemente.

($[a,b]$ semnifică cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b).

Soluţie. Se arată mai întâi că A este finită. Într-adevăr, dacă $b=\min A$ şi $a\in A\setminus\{b\}$, atunci din $(a-b)|[a,b]$ deducem $(a-b)|ab$. Cum $(a-b)|(a-b)$ rezultă $(a-b)|ab-b(a-b)$, adică $a-b|b^2$, deci $a\leq b+b^2$. Cum $a\in A$ a fost arbitrar ales rezultă de aici că A este finită. .... 2 puncte

Fie $a=\max A$ şi $b=\min A$. Dacă $d=(a,b)$, atunci $b=dx, a=dy$, cu $x,y\in\mathbb{N}^*$ şi $(x,y)=1$. Atunci $\frac{[a,b]}{a-b}=\frac{xy}{y-x}\in\mathbb{N}^*$. Cum x,y şi $x-y$ sunt două câte două prime între ele, deducem $y-x=1$ deci $y=x+1$ astfel că $a=d(x+1)$ şi $b=dx$. Atunci $\frac{[a,b]}{a-b}=x(x+1)\in A$, deci $b\leq x(x+1)\leq a$ de unde rezultă $d\in\{x,x+1\}$............ 2 puncte

Cazul 1. $d=x$.
Avem $a=x(x+1)$ şi $b=x^2$. Vom arăta că A nu mai are şi alte elemente în afară de a şi b.
Presupunând contrariul, fie $c=\min\big(A\setminus\{b\}\big)$. Analog ca mai sus se arată că există $d',z\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=d'(z+1)$ şi $c=d'z$. Atunci $\frac{[a,c]}{a-c}=z(z+1)\in A$. Se observă că $z(z+1)\neq x^2=b$, deci $c\leq z(z+1)\leq a$ de unde se obţine $d'\in\{z,z+1\}$.
Dacă $d'=z$, atunci $a=z(z+1)$ şi cum $a=x(x+1)$ ar rezulta că $x=z$, contradicţie deoarece s-ar obţine $b=c$;
Dacă $d'=z+1$, atunci $a=(z+1)^2$ şi $a=x(x+1)$, imposibil.
În consecinţă mulţimea A are 2 elemente .... 2 puncte

Cazul 2. $d=x+1$.
Avem $a=(x+1)^2$ şi $b=x(x+1)$. Vom arăta că A nu mai are şi alte elemente în afară de a şi b. Analog ca mai sus, fie $c=\min\big(A\setminus\{b\}\big)$. În acelaşi mod se obţine $c=d'z$, $a=d'(z+1)$, cu $d',z\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\frac{[a,c]}{a-c}=z(z+1)\in A$. Dacă $z(z+1)=b$, atunci $z(z+1)=x(x+1)$ şi folosind faptul că x,z sunt pozitive s-ar obţine $z=x$. Atunci $a=d'(x+1)$ şi $a=(x+1)^2$ implică $d'=x+1$ adică $b=c$, imposibil. Aşadar $c\leq z(z+1)\leq a$ de unde se obţine $d'\in\{z,z+1\}$. Cu acelaşi raţionament ca mai sus se ajunge la contradicţie, deci A are 2 elemente. .... 1 punct