Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, 6 aprilie 2010

CLASA a XII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Arătaţi că dacă F este derivabilă, atunci f este continuă.

Soluţie. Fie f crescătoare şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci limitele laterale, $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0+0)$, ale lui f în x_0 există, sunt reale şi $f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$. Fie $x < x_0$. Întrucât $f(t) \le f(x_0 - 0)$, $x \le t < x_0$, rezultă că

$$\int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \le (x_0 - x)f(x_0 - 0).$$

.... **2 puncte**

Prin urmare,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\displaystyle\int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x_0 - x} \le f(x_0 - 0).$$

Întrucât F este derivabilă în x_0, rezultă că $F'(x_0) \le f(x_0 - 0)$. În mod analog, $F'(x_0) \ge f(x_0 + 0)$. .... **4 puncte**
Deci $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. .... **1 punct**

Problema 2. Un inel A are proprietatatea (P) dacă orice element nenul se scrie în mod unic ca suma dintre un element inversabil şi unul neinversabil.

(a) Dacă în inelul A, $1 + 1 \neq 0$, arătaţi că A are proprietatea (P) dacă şi numai dacă A este corp.

(b) Daţi un exemplu de inel cu cel puţin două elemente, care are proprietatea (P), dar nu este corp.

Soluţie. **(a)** Dacă A este corp şi $x \in A$, $x \neq 0$, atunci x este inversabil şi $x = x + 0$; scrierea este unică, deoarece 0 este singurul element neinversabil. .... **1 punct**

Presupunem că A nu este corp. Fie $x \in A$, $x \neq 0$, un element neinversabil. Întrucât $1 + x = (1 + x) + 0$ şi $-1 + x = (-1 + x) + 0$, elementele $1 + x$ şi $-1 + x$ sunt neinversabile — în caz contrar, unicitatea scrierii ar implica $x = 0$. .... **2 puncte**

Deoarece $x = 1 + (-1 + x) = -1 + (1 + x)$, rezultă $1 = -1$, contradicţie. .... **1 punct**

(b) Fie E o mulţime nevidă şi $A = (\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ inelul părţilor lui E. În acest inel, E este singurul element inversabil. .... **1 punct**
Dacă X este o submulţime nevidă a lui E, atunci $E \setminus X$ este neinversabil şi $X = E\Delta(E \setminus X)$. Scrierea este unică, deoarece E este singurul element inversabil. .... **2 puncte**

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente,

$$H = \{x : x \in G \text{ şi } x^2 = e\},$$

unde e este elementul neutru al lui G, şi p numărul elementelor lui H. Arătaţi că:

(a) $\operatorname{Card}(H \cap xH) \geq 2p - n$, oricare ar fi $x \in G$, unde $xH = \{xh : h \in H\}$.

(b) Dacă $p > 3n/4$, atunci G este comutativ.

(c) Dacă $n/2 < p \leq 3n/4$, atunci G este necomutativ.

Soluţie. **(a)** Întrucât G este grup, rezultă că $|xH| = p$. ...... **1 punct**

Deci $n = |G| \geq |H \cup xH| = |H| + |xH| - |H \cap xH| = 2p - |H \cap xH|$, de unde, $|H \cap xH| \geq 2p - n$. .... **1 punct**

(b) Fie $x \in H$ şi $y \in H \cap xH$. Atunci $y = y^{-1}$ şi $y = xh$, $h \in H$. Întrucât $xy = x^2h = h \in H$, rezultă că $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Deci x comută cu toate elementele din $H \cap xH$. .... **1 punct**

Întrucât $|H \cap xH| \geq 2p - n > 3n/2 - n = n/2$, rezultă că subgrupul elementelor care comută cu x are cel puţin $n/2$ elemente. Din teorema lui Lagrange, rezultă că x comută cu toate elementele lui G. .... **1 punct**

Deci $H \subseteq Z(G)$, centrul lui G. Prin urmare, $|Z(G)| \geq |H| = p > 3n/4 > n/2$, deci $Z(G) = G$. .... **1 punct**

(c) Presupunem că G este comutativ. Dacă $x, y \in H$, atunci $(xy)^2 = x^2y^2 = e$, deci $xy \in H$. Întrucât H este finită, rezultă că H este un subgrup al lui G. .... **1 punct**

Condiţia $|H| > n/2$ forţează $H = G$, deci $3n/4 \geq |H| = |G| = n$ — contradicţie. .... **1 punct**

Problema 4. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, derivabilă în 0, şi

$$I(h) = \int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad h \in [0,1].$$

Arătaţi că:

(a) Există $M > 0$, astfel încât $|I(h) - 2f(0)h| \le Mh^2$, oricare ar fi $h \in [0,1]$.

(b) Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,|I(1/k)|$, este convergent dacă şi numai dacă $f(0) = 0$.

Soluţie. **(a)** Funcţia continuă $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(h) = \dfrac{I(h) - 2f(0)h}{h^2}$, poate fi prelungită prin continuitate în 0, deoarece

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \varphi(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{(I(h) - 2f(0)h)'}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h} - \frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right) = \frac{1}{2}(f'(0) - f'(0)) = 0.\end{aligned}$$

Prin urmare, φ este mărginită pe $(0,1]$. Fie $M = \sup\{|\varphi(h)| : 0 < h \le 1\}$. Atunci $|I(h) - 2f(0)h| \le Mh^2$, oricare ar fi $h \in (0,1]$; inegalitatea este evident adevărată şi pentru $h = 0$. .... **3 puncte**

(b) Deoarece

$$\big||I(h)| - 2|f(0)|h\big| \le |I(h) - 2f(0)h| \le Mh^2, \quad 0 < h \le 1,$$

rezultă că

$$2|f(0)|h - Mh^2 \le |I(h)| \le 2|f(0)|h + Mh^2, \quad 0 < h \le 1,$$

de unde

$$\frac{2|f(0)|}{\sqrt{k}} - \frac{M}{k\sqrt{k}} \le \sqrt{k}\,|I(1/k)| \le \frac{2|f(0)|}{\sqrt{k}} + \frac{M}{k\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

.... **1 punct**

Dar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

şi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \le 1 + 2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 3, \quad n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$ .... **1 punct**

Ţinând cont de aceste inegalităţi, rezultă că:

(1) Dacă $f(0) = 0$, atunci $a_n \leq 3M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; întrucât şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător, el este deci convergent. ....**1 punct**

(2) Dacă $f(0) \neq 0$, atunci $a_n \geq 2|f(0)|\sqrt{n} - 3M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit. ....**1 punct**

Remarcă. Dubla inegalitate

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

permite încadrarea

$$4|f(0)|\left(\sqrt{n+1} - 1\right) - 3M \leq a_n \leq 4|f(0)|\sqrt{n} + 3M, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care arată că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit dacă şi numai dacă $f(0)=0$; întrucât $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător, el este deci convergent dacă şi numai dacă $f(0)=0$.