Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Iaşi, 6 aprilie 2010

CLASA a XI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Se consideră numerele reale a, b cu $b - a^2 > 0$. Determinaţi toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 - 2aA + bI_2) = 0$.

Soluţie. Fie $c = \sqrt{b - a^2}$. Avem

$$A^2 - 2aA + bI_2 = (A - (a + \mathrm{i}c)I_2)(A - (a - \mathrm{i}c)I_2)$$

.... **2 puncte**
de unde rezultă că polinomul caracteristic al lui A are rădăcina $a + \mathrm{i}c$ sau $a - \mathrm{i}c$. Cum acesta este real, ambele sunt rădăcini, deci valori proprii .... **2 puncte**

Prin urmare polinomul este $x^2 - 2ax + b$. Rezultă $A^2 - 2aA + bI_2 = 0$ şi deci $\mathrm{tr}(A) = 2a$, $\det A = b$ .... **1 punct**

În concluzie toate matricile cu proprietatea din enunţ sunt de forma

$$\begin{pmatrix} a + x & y \\ \frac{a^2 - x^2 - b}{y} & a - x \end{pmatrix},$$

unde $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}^*$. .... **3 puncte**

Problema 2. Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $ABC = O_n$ şi $\mathrm{rang}(B) = 1$. Arătaţi că $AB = O_n$ sau $BC = O_n$.

Soluţie. Fie $K \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ şi $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $KL = B$ .... **2 puncte**

Atunci $O_n = (AK)(LC)$ cu $AK \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $LC \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Fie $AK = {}^{\mathrm{t}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (unde cu ${}^{\mathrm{t}}X$ s-a notat transpusa lui X) şi $LC = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Deducem

$$O_n = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

.... **2 puncte**

Dacă $LC \neq O_{1,n}$ atunci există $1 \leq i \leq n$ cu $b_i \neq 0$. Rezultă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, deci $AK = O_{n,1}$. Rezultă că cel puţin una dintre matricele AK şi LC este nulă. .... **2 puncte**

În primul caz avem $AB = (AK)L = O_{n,1}L = O_n$, iar în al doilea $BC = K(LC) = KO_{1,n} = O_n$ .... **1 punct**

Observaţii. Matricele A, B, C pot fi şi nepătratice.

Se poate da şi o soluţie pe ranguri (folosind teorema lui Frobenius).

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Arătaţi că f satisface inegalitatea $f(x+y) \geq (1+y)f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $y \geq 0$, dacă şi numai dacă funcţia $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definită prin $g(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este crescătoare.

Soluţie. Are loc inegalitatea $\mathrm{e}^y \geq 1+y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$. ...**1 punct**
Presupunem că funcţia g este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci, pe baza inegalităţii de mai sus, obţinem:

$$f(x+y) = \mathrm{e}^{x+y}g(x+y) \geq \mathrm{e}^{x}(1+y)g(x) = (1+y)f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $y \geq 0$. .... **2 puncte**
Reciproc, presupunem $f(x+y) \geq (1+y)f(x)$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ şi oricare $y \geq 0$.
Se verifică prin inducţie proprietatea:

$$f(x+nt) \geq (1+t)^n f(x),$$

pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. .... **1 punct**
Fie $x, z \in \mathbb{R}$, cu $x < z$. Notăm $y = z - x$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$g(z) = \mathrm{e}^{-z}f(z) = \mathrm{e}^{-x-y}f\left(x + n \cdot \frac{y}{n}\right) \geq \mathrm{e}^{-x-y}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n f(x) = \frac{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\mathrm{e}^y}g(x).$$

Rezultă

$$g(z) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\mathrm{e}^y}g(x) = g(x).$$

Deducem că g este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. .... **3 puncte**

Problema 4. Pentru un număr real pozitiv a, definim şirul de numere reale $(x_n)_n$ prin $x_1 = a$ şi relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \left|x_n - \frac{1}{n}\right|, \quad \text{pentru } \ \mathrm{n} \geq 1.$$

Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita.

Soluţie. Are loc proprietatea: pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N},\ k \geq n$, astfel încât $x_k \leq \frac{1}{k}$. .... **1 punct**

Astfel, presupunând că, pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$, am avea $x_k > \frac{1}{k}$, $\forall\ k \geq n$, ar rezulta

$$x_{m+1} = x_n + \sum_{k=n}^{m} (x_{k+1} - x_k) = x_n - \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k},$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}, m \geq n$.

Cum $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = \infty$, am obţine $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = -\infty$.
Contradicţie .... **3 puncte**

Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{1}{N} < \varepsilon$. În baza proprietăţii demonstrate, există $N_1 \geq N$ astfel ca $x_{N_1} \in \left[0, \frac{1}{N_1}\right]$. Se verifică prin inducţie proprietatea: $x_n \in \left[0, \frac{1}{N_1}\right] \subset [0, \varepsilon)$, pentru oricare $n \geq N_1$.

Rezultă că şirul converge la 0, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$. .... **3 puncte**

Observaţie. O demonstraţie mai elegantă, dar bazată pe aceeaşi idee, rezultă considerând şirul $y_n = \max(x_n, \frac{1}{n})$