Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa naţională, Iaşi, 6 aprilie 2010

CLASA a X-a
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale strict pozitive, pentru care

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a_k \cdot a_{n-k} = a_n^2,$$

pentru orice $n \geq 0$. Să se arate că şirul este o progresie geometrică.

Soluţie. Notând $a_0 = a$, obţinem imediat $a_1 = 2a$, şi, pentru $n = 2$,

$$a_2^2 - 2a \cdot a_2 - 8a^2 = 0,$$

de unde, deoarece $a_2 > 0$, rezultă $a_2 = 4a$. .... **2 puncte**

Demonstrăm prin inducţie că $a_n = 2^n a$, pentru orice n. Presupunând $a_k = 2^k a$, pentru orice k, $0 \leq k \leq n$, rămâne să arătăm că $a_{n+1} = 2^{n+1}a$. Avem

$$2a \cdot a_{n+1} + a^2 \cdot 2^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k = a_{n+1}^2,$$

sau

$$2a \cdot a_{n+1} + a^2 \cdot 2^{n+1} \cdot \left(2^{n+1} - 2\right) = a_{n+1}^2.$$

Singura valoare pozitivă a lui a_{n+1} care verifică egalitatea este $a_{n+1} = 2^{n+1}a$, ceea ce incheie demonstraţia. .... **5 puncte**

Problema 2. Fie $v, w \in \mathbb{C}^*$, distincte. Să se arate că

$$|zw + \overline{w}| \leq |zv + \overline{v}|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, dacă şi numai dacă există $k \in [-1, 1]$ astfel încât $w = kv$.

Soluţie. Dacă există $k \in [-1, 1]$ astfel încât $w = kv$, inegalitatea cerută se verifică imediat. .... **1 punct**

Reciproc, fie $t > 1$ astfel ca $w - tv \neq 0$. Luând

$$z = \frac{t\overline{v} - \overline{w}}{w - tv},$$

avem $|z| = 1$ şi obţinem

$$zw + \overline{w} = \frac{t(w\overline{v} - \overline{w}v)}{w - tv},$$
$$zv + \overline{v} = \frac{w\overline{v} - \overline{w}v}{w - tv},$$

de unde

$$|zw + \overline{w}| = t\,|zv + \overline{v}|\,.$$

.... **4 puncte**

Deoarece $t > 1$, din inegalitatea din ipoteză deducem că $|zw + \overline{w}| = |zv + \overline{v}| = 0$, deci $w\overline{v} - \overline{w}v = 0$, adică $\frac{w}{v} = k \in \mathbb{R}$. .... **1 punct**

Înlocuind în condiţia iniţială, deducem şi $k \in [-1, 1]$. .... **1 punct**

Problema 3. Se consideră în plan 100 de puncte, oricare trei necoliniare. Punctele se împart în 10 grupe, fiecare având cel puţin trei puncte. Oricare două puncte din aceeaşi grupă se unesc între ele cu un segment.

a) Să se determine pentru ce împărţire a punctelor numărul de triunghiuri formate cu aceste segmente este minim.

b) Să se arate că există o alegere a grupelor cu proprietatea că toate segmentele pot fi colorate cu trei culori astfel încât să nu existe un triunghi având laturile colorate cu aceeaşi culoare.

Soluţie. a) Dacă grupele conţin, respectiv $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ puncte, atunci numărul de triunghiuri formate este

$$N = C_{a_1}^3 + C_{a_2}^3 + \ldots + C_{a_{10}}^3.$$

.... **1 punct**

Afirmăm că acest număr este minim atunci când

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = 10,$$

valoarea minimă fiind $10C_{10}^3$. Într-adevăr, dacă există o grupă având $m \geq 11$ puncte, va exista o altă grupă având $n \leq 9$ puncte. Mutând un punct din prima grupă în cea de-a doua, numărul de triunghiuri scade. Această afirmaţie rezultă din inegalitatea

$$C_m^3 + C_n^3 > C_{m-1}^3 + C_{n+1}^3,$$

care se verifică imediat prin calcul direct. .... **3 puncte**

b) Alegem în fiecare grupă câte 10 puncte şi în fiecare grupă formăm câte două subgrupe de câte 5 puncte. Deoarece poziţiile punctelor nu contează, putem presupune că fiecare subgrupă de 5 puncte formează un pentagon convex. Colorăm laturile lor cu culoarea C_1, diagonalele cu culoarea C_2, iar segmentele care unesc punctele din subgrupe diferite cu culoarea C_3. E uşor de văzut că nu există nici un triunghi monocolor. .... **3 puncte**

Problema 4. În exteriorul triunghiului neechilateral ABC se consideră triunghiurile asemenea ABM, BCN şi CAP astfel încât triunghiul MNP să fie echilateral. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiurilor ABM, BCN şi CAP.

Soluţie. Considerăm orientarea direct trigonometrică pentru triunghiul ABC. Notăm afixele punctelor cu litere mici analoage. Din asemănarea din ipoteză deducem

$$\frac{m-b}{a-b} = \frac{n-c}{b-c} = \frac{p-a}{c-a} \stackrel{\text{not}}{=} k,$$

de unde

$$\begin{aligned} m &= ka + (1-k)\,b, \\ n &= kb + (1-k)\,c, \\ p &= kc + (1-k)\,a. \end{aligned}$$

.... **2 puncte**

Deoarece triunghiul MNP este echilateral, avem

$$m + \varepsilon n + \varepsilon^2 p = 0,$$

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.. **1 punct**

Înlocuind, obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= k\left(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2\right) + (1-k)\left(b + c\varepsilon + a\varepsilon^2\right) \\ &= k\left(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2\right) + \frac{1-k}{\varepsilon}\left(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2\right) \\ &= \left(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2\right)\left(k + \frac{1-k}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Dar ABC nu este echilateral, aşadar $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 \neq 0$. Rezultă

$$k = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

.... **2 puncte**

şi egalitatea $m = ka + (1-k)\,b$ devine $m - a = \varepsilon\,(m-b)$, ceea ce arată că triunghiul AMB este isoscel, cu un unghi de măsură $\frac{2\pi}{3}$. Desigur, celelalte două unghiuri au măsura $\frac{\pi}{6}$. .... **2 puncte**