Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa naţională, Iaşi, 6 aprilie 2010

CLASA a IX-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E, F în care bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle ACB$ taie cercul său circumscris.

a) Arătaţi că ortocentrul triunghiului DEF coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

b) Arătaţi că, dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie. a) Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci D, E, F sunt mijloacele arcelor mici $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ .... **1 punct**
De aici, unghiul AD, EF este $\frac{1}{2}(\widehat{AE} + \widehat{DF}) = \frac{1}{4}(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA}) = 90°$, deci $AD \perp EF$; analog $BE \perp DF$ .... **2 puncte**

b) Din ipoteză deducem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$, unde O este centrul cercului circumscris .... **2 puncte**
Folosind relaţia lui Sylvester, reiese că ortocentrele celor două triunghiuri coincid. Astfel, în triunghiul ABC punctul I este şi ortocentru, de unde concluzia .... **2 puncte**

Problema 2. Demonstraţi că există o asemănare între un triunghi ABC şi triunghiul având ca laturi medianele sale dacă şi numai dacă pătratele lungimilor laturilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică.

Soluţie. Folosim $m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2(b^2 + c^2) - a^2\right)$ şi analoagele .... **1 punct**

Dacă pătratele laturilor sunt în progresie aritmetică, atunci, de exemplu, $2b^2 = a^2 + c^2$, de unde $m_a^2 = \frac{3}{4}c^2$, $m_b^2 = \frac{3}{4}b^2$, $m_c^2 = \frac{3}{4}a^2$, ceea ce arată că

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi are loc asemănarea cerută .... **2 puncte**

Reciproc, dacă există asemănarea şi $a \leq b \leq c$, atunci $m_a \geq m_b \geq m_c$, deci

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a} = k$$ .... **2 puncte**

Din $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ reiese $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $4m_b^2 = 3b^2$, ceea ce conduce la $2b^2 = a^2 + c^2$ .... **2 puncte**

Problema 3. Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm A_n mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{n}\right].$$

a) Determinaţi $A_2 \cup A_3$.

b) Arătaţi că mulţimea $A = \bigcup_{n \geq 2} A_n$ este finită şi determinaţi $\max A$.

Soluţie. Observăm că $A_n \subset \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .... **1 punct**

a) Elementele din A_2 îndeplinesc inegalităţile $x - 2 < 2x \leq x$, de unde, prin verificare, $A_2 = \{-1, 0\}$ .... **1 punct**

Elementele din A_3 îndeplinesc inegalităţile $5x - 12 < 6x \leq 5x$, de unde, prin verificare, $A_3 = \{-7, -5, -4, -3, -2, 0\}$, iar $A_2 \cup A_3 = \{-7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$. **1 punct**

b) Pentru $n \geq 4$, dacă $x \in A_n$, atunci $x \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x$, iar din $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1$ reiese $x \geq 0$ .... **1 punct**

Apoi, pentru $x, n \in \mathbb{Z}$ şi $n \geq 2$, $\left[\frac{x}{n}\right] \geq \frac{x-(n-1)}{n}$. Astfel, dacă $n \geq 4$ şi $x \in A_n$, atunci

$$x \geq \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] \geq \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4},$$

de unde $x \leq 23$, deci A este mărginită superior .... **1 punct**

Deoarece $A \subset \{-5, -4, \ldots, 23\}$ şi $23 \in A_4$, $\max A = 23$ ...... **2 puncte**

Observaţie. Pentru mărginirea superioară a lui A este suficient să folosim $\left[\frac{x}{k}\right] > \frac{x}{k} - 1$ pentru $k \in \{2, 3, 4\}$, dar aceasta îngreunează aflarea lui $\max A$.

Problema 4. Se consideră mulţimea $\mathcal{F}$ a funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea:

$$f(a^2 - b^2) = f^2(a) - f^2(b), \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N}, a \geq b.$$

a) Determinaţi $\{f(1) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

b) Arătaţi că $\mathcal{F}$ are exact două elemente.

Soluţie. a) Pentru $a = b$ obţinem $f(0) = 0$. Apoi $f(a^2) = f^2(a), \forall a \in \mathbb{N}$, deci $f(1) = f^2(1)$, de unde $f(1) \in \{0, 1\}$ .... **1 punct**

Este posibil ca $f(1) = 0$ (pentru $f_0 \equiv 0 \in \mathcal{F}$) şi ca $f(1) = 1$ (pentru $f_1 = 1_{\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$), deci mulţimea cerută este $\{0, 1\}$ .... **1 punct**

b) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ şi $f \in \mathcal{F}$, atunci $f(a), f(b) \in \mathbb{N}$ şi $f^2(a) - f^2(b) = f(a^2 - b^2) \geq 0$, deci $f(a) \geq f(b)$, adică f este crescătoare. .... **1 punct**

În cazul $f(1) = 0$ obţinem $f(4) = f^2(2) = f^2(2) - f^2(1) = f(3)$, de unde $f(7) = f^2(4) - f^2(3) = 0$, apoi, inductiv, $f(7^{2^n}) = 0$. Cum f este crescătoare, reiese $f = f_0$ .... **1 punct**

În cazul $f(1) = 1$, notând $f(2) = x$ obţinem $f(4) = x^2, f(3) = x^2 - 1$, $f(5) = f^2(3) - f^2(2) = x^4 - 3x^2 + 1$, iar din $f(16) = f^2(5) - f^2(3)$ deducem $x^4 = (x^4 - 3x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2$ .... **1 punct**

Aceasta este echivalent cu $x^2(x^2 - 1)^2(x^2 - 4) = 0$. Deoarece în acest caz f este strict crescătoare ($a, b \in \mathbb{N},\ a > b$ implică $f^2(a) - f^2(b) \geq f(1) > 0$), deducem $x = 2$. De aici, inductiv, $f(2^{2^n}) = 2^{2^n}$ şi, din stricta monotonie, $f = f_1$ .... **2 puncte**