Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Iaşi, 6 aprilie 2010

CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie a, b, c numere naturale mai mari sau egale cu 2. Arătaţi că $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1) \leq (a+b+c-4)(a+b+c-5)+4$.

Soluţie. Inegalitatea se scrie echivalent $a^2+b^2+c^2-a-b-c \leq (a+b+c)^2-9(a+b+c)+24$, ...**2 puncte**
adică $0 \leq 2(ab+bc+ca)-8(a+b+c)+24$ sau $0 \leq (ab+bc+ca)-4(a+b+c)+12$. ....**2 puncte**

Cum $(ab-2a-2b+4)=(a-2)(b-2)$, ...**1 punct**
grupând convenabil găsim $(ab-2a-2b+4)+(bc-2b-2c+4)+(ca-2c-2a+4)=(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2) \geq 0$, deoarece $a, b, c \geq 2$. ....**2 puncte**

Problema 2. Determinaţi câte numere naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ verifică simultan egalităţile $a+b=c+d$ şi $a^2+b^2=c^2+d^2$.

Soluţie. Din $a+b=c+d$ rezultă $(a+b)^2=(c+d)^2$, deci
$ab=cd$. ....**1 punct**

Deducem că $a^2-2ab+b^2=c^2-2cd+d^2$, adică $(a-b)^2=(c-d)^2$, deci $|a-b|=|c-d|$. ....**1 punct**

Obţinem $a-b=c-d$ sau $a-b=d-c$. Cum $a+b=c+d$, prin adunare rezultă $a=c$, $b=d$ sau $a=d$, $b=c$. ....**1 punct**

Rezultă că numerele sunt de forma $\overline{aaaa}$, $\overline{abba}$ sau $\overline{abab}$, cu $a \neq 0$ şi
$a \neq b$. ....**2 puncte**

Obţinem $9+9 \cdot 9+9 \cdot 9=9+81+81=171$ numere. ....**2 puncte**

Problema 3. Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$. Pe dreapta AC există un punct M astfel încât $VM=MB$ şi $(VMB) \perp (VAB)$. Arătaţi că $4AM=3AC$.

Soluţie. Deoarece $MV=MB=MD$ şi $MO \perp (VBD)$, rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului VBD. ....**1 punct**

Rezultă că triunghiul VBD este dreptunghic isoscel, deci feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale. ....**2 puncte**

Notăm P mijlocul muchiei VB. Atunci unghiul dintre planele (VAB) şi (VBM) este $\sphericalangle APM$, deci $\sphericalangle APM=90°$. ....**1 punct**

Triunghiurile MPA şi POA sunt asemenea, deci $\dfrac{MA}{PA} = \dfrac{PA}{OA}$. **2 puncte**

De aici $AM = \dfrac{PA^2}{OA} = \dfrac{3}{4}AC$, ceea ce trebuia demonstrat. ..... **1 punct**

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule şi $p = a + b + c + d$. Ştiind că p este număr prim, arătaţi că p nu divide $ab - cd$.

Soluţie. Avem $(a+c)(b+c) = ab+ac+bc+c^2 = (a+b+c+d)c+ab-cd = pc + ab - cd$. .... **3 puncte**

Dacă p divide $ab - cd$, atunci p divide $a + c$ sau $b + c$. .... **2 puncte**

Însă $0 < a + c < p$ şi $0 < b + c < p$, contradicţie. .... **2 puncte**