Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Iaşi, 6 aprilie 2010

CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie S o submulţime cu 673 de elemente a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2010\}$. Arătaţi că există două elemente distincte a şi b din S cu proprietatea că 6 divide $a + b$.

Soluţie. Considerăm mulţimile: $A = \{6, 12, \ldots, 2010\}$, $B = \{3, 9, 15, \ldots, 2007\}$, $C = \{1, 7, 13, \ldots, 2005\}$, $D = \{2, 8, 14, \ldots, 2006\}$, $E = \{4, 10, 16, \ldots, 2008\}$, $F = \{5, 11, 17, \ldots, 2009\}$, fiecare având câte 335 elemente. .... **3 puncte**

Dacă în S există două elemente din A sau două elemente din B, suma lor se divide cu 6, ceea ce încheie soluţia. În caz contrar, în celelalte 4 mulţimi se află cel puţin $673 - 2 = 671$ elemente din S. .... **2 puncte**

Considerăm mulţimile $C \cup F$ şi $D \cup E$, fiecare având 670 elemente. Atunci intersecţia lui S cu una dintre cele două mulţimi – fie ea $C \cup F$ – are cel puţin 336 elemente. .... **1 punct**

Atunci mulţimile $S \cap C$ şi $S \cap F$ au fiecare cel puţin un element. Suma acestora este multiplu de 6, ceea ce încheie soluţia. .... **1 punct**

(Cazul $|D \cup E| \geq 336$ se tratează analog.)

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O, având $\sphericalangle DAC = 60°$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$ intersectează DC în S. Dreptele OS şi AD se intersectează în L, iar dreptele BL şi AC se intersectează în M. Arătaţi că dreptele SM şi CL sunt paralele.

Soluţie. Avem $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = 30°$, deci $SA = SC$. Cum $OA = OC$, rezultă că $SO \perp AC$. .... **1 punct**

De aici $LA = LC$. În plus, unghiul $\sphericalangle LAC$ are 60°, deci triunghiul ALC este echilateral. .... **1 punct**

Punctul S este centrul triunghiului echilateral LAC, deci $\dfrac{LS}{SO} = 2$. .... **1 punct**

Patrulaterul $DBCL$ este paralelogram. Notăm Q centrul său, deci $DQ = QC$. .... **1 punct**

Punctul M este centrul de greutate al triunghiului DBC, deci $\dfrac{CM}{MO} = 2$. .... **2 puncte**

Din $\dfrac{LS}{SO} = \dfrac{CM}{MO}$, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă cerinţa. .... **1 punct**

Problema 3. Căsuţele unui tablou cu 50 de linii şi 50 de coloane se pot colora numai cu roşu sau cu albastru. Iniţial, toate căsuţele sunt colorate cu roşu. Un *pas* înseamnă schimbarea culorii tuturor căsuţelor dintr-o linie sau dintr-o coloană.

a) Arătaţi că nu există nicio secvenţă de paşi după care tabloul conţine exact 2011 căsuţe colorate cu albastru.

b) Găsiţi un număr de paşi după care tabloul conţine exact 2010 căsuţe colorate cu albastru.

Soluţie. Să observăm că liniile selectate spre a fi modificate pot fi considerate consecutive; aceeaşi precizare este valabilă pentru coloane. Mai mult, selectarea unei linii (sau coloane) de două ori nu modifică starea acesteia, deci presupunem că cele x linii sunt distincte şi cele y coloane sunt distincte.

Dacă primele x linii şi primele $50-y$ coloane au fost modificate, se creează un dreptunghi $x \times y$ şi un dreptunghi $(50-x) \times (50-y)$ cu toate căsuţele albastre, restul tabloului rămânând roşu. .... **1 punct**

Astfel obţinem exact $A = xy + (50-x)(50-y)$ căsuţe albastre. ..... **2 puncte**

a) Numărul $A = 2500 + 2xy - 50(x+y)$ este par, deci nu poate fi egal cu 2011. .... **1 punct**

b) Avem $A = 2010 \Leftrightarrow xy - 25x - 25y + 245 = 0 \Leftrightarrow (x-25)(y-25) = 380 = 19 \cdot 20$. .... **2 puncte**

Pentru $x = 25 + 19 = 44$ şi $y = 25 + 20 = 45$ obţinem cerinţa. **1 punct**

Notă. Numărul necesar de paşi nu este unic.

Problema 4. Într-un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$, bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în punctul B' şi există egalitatea $BB' + B'A = BC$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluţie. Pe latura BC a triunghiului considerăm punctul M cu $BB' = BM$. Egalitatea din enunţ devine $AB' = MC$. .... **1 punct**

Teorema bisectoarei implică $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$, de unde $\frac{MC}{B'C} = \frac{AC}{BC}$. .... **2 puncte**

Rezultă că triunghiurile MCB' şi ACB sunt asemenea, ... **1 punct**

deci $MC = MB'$. .... **1 punct**

Mai mult, $C = \sphericalangle MCB' = \sphericalangle MB'C$. Atunci $\sphericalangle BMB' = 2C$ şi cum triunghiul $BB'M$ este isoscel, rezultă că $\sphericalangle BB'M = 2C$. .... **1 punct**

În triunghiul $BB'M$ avem $180^\circ = 2C + 2C + \frac{C}{2}$, adică $C = B = 40^\circ$ şi $A = 100^\circ$. .... **1 punct**