Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011**

**CLASA a XII-a – BAREMURI**

**Problema 1.** Fie $m$ un număr natural nenul, $p$ un număr prim şi $A$ un inel care are exact $m$ elemente inversabile, iar $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ ori}} = 0$. Să se arate că inelul $A$ are elemente nilpotente nenule dacă şi numai dacă $p$ divide $m$.

**Soluţie.** Fie $a \in A$, $a \neq 0$, un element nilpotent şi $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^{p^k} = 0$. Întrucât $(a+1)^{p^k} = a^{p^k} + 1 = 1$, rezultă că $a+1$ este inversabil şi ordinul lui $a+1$ în grupul multiplicativ $U(A)$ al unităţilor lui $A$ este o putere a lui $p$. Deoarece ordinul lui $a+1$ divide ordinul $m$ al lui $U(A)$, rezultă că $p$ divide $m$. ............................................... **3 puncte**

Reciproc, conform teoremei lui Cauchy, există un element $a$ de ordin $p$ în $U(A)$. Întrucât $(a-1)^p = a^p - 1 = 0$ şi $a \neq 1$, rezultă că $a-1$ este un element nilpotent nenul. ....................................... **4 puncte**

**Problema 2.** Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcţie continuă. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se consideră diviziunea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, astfel încât

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{f(t_1)} + \dfrac{1}{f(t_2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(t_n)}}.$$

**Soluţia 1.** Fie $F : [0,1] \to [0,I]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{unde} \quad I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Deoarece $f$ ia valori strict pozitive, rezultă că $F$ este strict crescătoare, deci injectivă. Întrucât $F$ este continuă, $F(0) = 0$ şi $F(1) = I$, rezultă că $F$ este surjectivă şi $F^{-1}(kI/n) = t_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$, $n \geq 2$. ............ **2 puncte**

Dacă notăm cu $(x_n)_{n\geq 2}$ şirul din enunţ, atunci

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(t_k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(F^{-1}(kI/n))} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F'(F^{-1}(kI/n))}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (F^{-1})'(kI/n).\end{aligned}$$

............................................................................ **3 puncte**

Întrucât $(F^{-1})'$ este continuă, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \int_0^1 (F^{-1})'(Ix)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{I}F^{-1}(Ix)\Big|_0^1 = \frac{1}{I}.$$

............................................................ **2 puncte**

**Soluţia 2.** Fie $\mu = \min\{f(t) : 0 \le t \le 1\} > 0$ şi

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Aplicând teorema mediei pe fiecare interval $[t_{k-1}, t_k]$, obţinem

$$I/n = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t = (t_k - t_{k-1})f(\theta_k), \quad t_{k-1} < \theta_k < t_k,$$

deci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(t_k)} = \frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)}.$$

............................................................ **1 punct**

Fie $\varepsilon > 0$ şi $n$ suficient de mare: $I/n < \varepsilon$. Întrucât $f$ este continuă, iar $[0,1]$ este compact, $f$ este uniform continuă pe acest interval: există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, dacă $|x - x'| < \delta$. Dacă $n$ este suficient de mare, atunci

$$0 < t_k - \theta_k < t_k - t_{k-1} = \frac{I}{nf(\theta_k)} \le \frac{I}{n\mu} < \delta, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

deci $|f(t_k) - f(\theta_k)| < \varepsilon$, de unde

$$\left|\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{f(t_k)} \le \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - \frac{1}{I}\right| &= \left|\frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\left(\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right)\right| \\ &\le \frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\left|\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{I\mu},\end{aligned}$$

i. e., şirul din enunţul problemei este convergent la $I$. .......... **6 puncte**

**Problema 3.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, şi $A$ un inel cu $n$ elemente, astfel încât ecuaţia $x^{n+1} + x = 0$ să aibă în $A \setminus \{0\}$ soluţia unică $x = 1$. Să se arate că $A$ este corp.

**Soluţie.** Întrucât 1 verifică ecuaţia $x^{n+1}+x=0$, rezultă că $1+1=0$, deci toate elementele nenule ale grupului aditiv $(A,+)$ au ordinul 2. Teorema lui Cauchy implică deci că $n=2^m$, $m\in\mathbb{N}^*$. .................... **1 punct**

Fie $a\in A$, $a\neq 0$. Întrucât inelul $A$ este finit, există $p<q$, astfel încât $a^p=a^q$. Prin înmulţiri succesive cu $a^{q-p}$, rezultă că $a^q=a^{(k+1)q-kp}$, $k\geq 1$. Alegem $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $r=(k+1)q-kp>2q$. Prin înmulţire cu $a^{r-2q}$, obţinem $a^{r-q}=a^{2(r-q)}$. Fie $b=a^{r-q}$. Întrucât $b^2=b$, rezultă că $b^{n+1}=b$, deci $b^{n+1}+b=0$, de unde $b\in\{0,1\}$. ........................ **4 puncte**

Dacă $b=a^{r-q}=0$, alegem $s\in\mathbb{N}$, $s\geq 2$, astfel încât $a^{s-1}\neq 0$ şi $a^s=0$. Fie $c=a^{s-1}$. Atunci $c^2=0$ şi în consecinţă $(c+1)^{n+1}=(c+1)^{2^m}(c+1)=(c^{2^m}+1)(c+1)=c+1$. Conform ipotezei, rezultă că $c+1\in\{0,1\}$ — contradicţie. Deci $a^{r-q}=1$, i. e., $a$ este inversabil. ............ **2 puncte**

**Problema 4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care are derivate laterale finite în orice punct din $\mathbb{R}$ şi $F(0)=0$. Ştiind că

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x)\leq F'_s(x_0) \quad \text{şi} \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x)\geq F'_d(x_0),$$

oricare ar fi $x_0\in\mathbb{R}$, să se arate că

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}.$$

**Soluţie.** Considerăm funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$G(x)=F(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Fie $x_0\in\mathbb{R}$, $x\neq x_0$. Atunci

$$F(x)=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+F(x_0).$$

Deoarece $F$ are derivate laterale finite în $x_0$, rezultă că funcţia

$$x\mapsto\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}, \quad x\neq x_0,$$

este mărginită în jurul lui $x_0$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$. Prin urmare, funcţia $G$ este continuă. ................................................ **1 punct**

Arătăm că $G$ are derivate laterale finite în fiecare punct $x_0\in\mathbb{R}$ şi $G'_s(x_0)\geq 0$ şi $G'_d(x_0)\leq 0$. Fie $x>x_0$. Deoarece $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)\leq f(t)\leq f(x)$, $x_0<t\leq x$, rezultă că

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x)\leq\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(x),$$

deci

$$\lim_{x\downarrow x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow x_0}\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\downarrow x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\&=F'_d(x_0)-\lim_{x\downarrow x_0}f(x)\le 0.\end{aligned}$$

În mod analog,

$$\lim_{x\uparrow x_0}\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}=F'_s(x_0)-\lim_{x\uparrow x_0}f(x)\ge 0.$$

............................................................ **2 puncte**

Aşadar, $0\le G'_s(x)<\infty$ şi $-\infty<G'_d(x)\le 0$, oricare ar fi numărul real $x$. Rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{G(x-\varepsilon)-G(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}G'_s(x)\le 0,\quad x\in\mathbb{R},$$

şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{G(x+\varepsilon)-G(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}=\frac{1}{2}G'_d(x)\le 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Arătăm că $G$ este constantă. Să presupunem că există $a<b$, astfel încât $G(a)\ne G(b)$.

Dacă $G(a)<G(b)$, considerăm un număr real strict negativ $\lambda>(G(a)-G(b))/(b-a)$. Funcţia $H:[a,b]\to\mathbb{R}$, $H(x)=G(x)+\lambda x$, este continuă, $H(a)<H(b)$ şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{H(x+\varepsilon)-H(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}=\frac{1}{2}G'_d(x)+\frac{\lambda}{2}\le\frac{\lambda}{2}<0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Deci, oricare ar fi numărul real $x$, există $\delta(x)>0$, astfel încât $H(x+\varepsilon)<H(x+\varepsilon/2)$, $0<\varepsilon<\delta(x)$. Fie $c\in[a,b]$, astfel încât

$$H(c)=\min\{H(x): a\le x\le b\}.$$

Întrucât $H(a)<H(b)$, rezultă că $a\le c<b$. Fixăm un număr real strict pozitiv $\varepsilon<\min(b-c,\delta(c))$. Atunci

$$H(c)\le H(c+\varepsilon)<H(c+\varepsilon/2)<\cdots<H(c+\varepsilon/2^n)<\cdots\le H(c),$$

ultima inegalitate rezultând din continuitatea lui $H$ — contradicţie.

Dacă $G(a)>G(b)$, procedăm în mod analog: considerăm un număr real strict pozitiv $\lambda<(G(a)-G(b))/(b-a)$. În acest caz, funcţia continuă corespunzătoare, $H(x)=G(x)+\lambda x$, îndeplineşte condiţiile $H(a)>H(b)$ şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{H(x-\varepsilon)-H(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}G'_s(x)-\frac{\lambda}{2}\le-\frac{\lambda}{2}<0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Deci, oricare ar fi numărul real $x$, există $\delta(x) > 0$, astfel încât $H(x - \varepsilon) < H(x - \varepsilon/2)$, $0 < \varepsilon < \delta(x)$. Fie $c \in [a, b]$, astfel încât

$$H(c) = \min \{H(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Întrucât $H(a) > H(b)$, rezultă că $a < c \leq b$. Fixăm un număr real strict pozitiv $\varepsilon < \min(c - a, \delta(c))$. Atunci

$$H(c) \leq H(c - \varepsilon) < H(c - \varepsilon/2) < \cdots < H(c - \varepsilon/2^n) < \cdots \leq H(c),$$

ultima inegalitate rezultând din continuitatea lui $H$ — contradicţie.

În consecinţă, $G$ este constantă. Întrucât $G(0) = 0$, rezultă că $G(x) = 0$, oricare ar fi $x$ real. .............................................. **4 puncte**