Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a X-a – BAREMURI

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| \leq 2, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $|f(x)| \leq 1 + \cos x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Daţi exemplu de o astfel de funcţie, care să nu se anuleze în niciun punct din intervalul $(-\pi, \pi)$.

Soluţie. a) Pentru $x = t - \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ obţinem $f(t) - \cos t + 1 \leq 2$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ **2p**

Pentru $x = t + \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2}$ obţinem $f(t) + \cos t - 1 \geq -2$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ **2p**

Cele două relaţii precedente dovedesc cerinţa **1p**

b) Un exemplu este dat de $f(x) = 2 - 2|\sin\frac{x}{2}|$. El este sugerat de observaţia că ipoteza este echivalentă cu

$$2 \geq \max_{u\in\mathbb{R}} \left(f(t) + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{u}{2} \right) = f(t) + 2|\sin\frac{t}{2}|$$
$$-2 \leq \min_{u\in\mathbb{R}} \left(f(t) + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{u}{2} \right) = f(t) - 2|\sin\frac{t}{2}|,$$

adică $|f(x)| \leq 2 - 2|\sin\frac{x}{2}|, \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

2. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care există trei rădăcini complexe de ordinul n ale unităţii, nu neapărat distincte, având suma 1.

Soluţie. Dacă n este par, atunci $-1, 1, 1$ sunt trei rădăcini de ordinul n ale unităţii şi au suma 1. .... **2p**

Apoi, dacă $x, y, z \in \mathbb{C}$, $x^n = y^n = z^n = 1$ şi $x + y + z = 1$, atunci $|x| = |y| = |z|$, deci $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1/x + 1/y + 1/z = 1$, ceea ce conduce la $xy + xz + yz = xyz$ **2p**

Înlocuind $z = 1 - x - y$ obţinem $(x+y)(1-x)(1-y) = 0$, de unde reiese că unul dintre numerele x, y, z este 1 şi celelalte două au suma nulă **2p**

Deoarece în cazul n impar nu există două rădăcini opuse, răspunsul este: $n =$ par **1p**

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{a^x + c^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x}$$

este crescătoare pe $[0, \infty)$ şi descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

Soluţie. Datorită simetriei formulei care defineşte funcţia, putem analiza doar cazul $a \geq b \geq c$ **2p**

Notând $s_p = a^p + b^p + c^p$, obţinem

$$f(y) - f(x) = \sum \frac{a^y s_x - a^x s_y}{(b^x + c^x)(b^y + c^y)} .$$

Din $b^y s_x - b^x s_y = a^x s_y + c^x s_y - a^y s_x - c^y s_x$ reiese, pentru $0 \leq x \leq y$,

$$f(y) - f(x) = \frac{(a^y s_x - a^x s_y)\left[(a^x + c^x)(a^y + c^y) - (b^x + c^x)(b^y + c^y)\right]}{(a^x + c^x)(a^y + c^y)(b^x + c^x)(b^y + c^y)} + \\ + \frac{(c^y s_x - c^x s_y)\left[(a^x + c^x)(a^y + c^y) - (a^x + b^x)(a^y + b^y)\right]}{(a^x + b^x)(a^y + b^y)(a^x + c^x)(a^y + c^y)} \geq 0,$$

deoarece $\alpha^y \beta^x \geq \alpha^x \beta^y$ pentru $\alpha \geq \beta$ şi $a^p \geq b^p \geq c^p$ pentru $p \geq 0$....... **3p**

Deoarece $f(-x) = \dfrac{(bc)^x}{(ab)^x + (ac)^x} + \dfrac{(ac)^x}{(ab)^x + (bc)^x} + \dfrac{(ab)^x}{(ac)^x + (bc)^x}$, funcţie de forma celei deja studiate, iar $x \leq y \leq 0 \Rightarrow -x \geq -y \geq 0$, rezultă că funcţia este descrescătoare pe $[0, \infty)$ **2p**

4. a) Arătaţi că, pentru fiecare număr natural n, există şi sunt unic determinate numerele naturale x_n, y_n care îndeplinesc relaţia

$$(1 + \sqrt{33})^n = x_n + y_n\sqrt{33}.$$

b) Demonstraţi că, dacă definim x_n, y_n ca la a) şi p este un număr natural prim, atunci cel puţin unul dintre numerele y_{p-1}, y_p, y_{p+1} se divide cu p.

Soluţie. a) Egalitatea este valabilă pentru $x_n = C_n^0 + 33C_n^2 + 33^2C_n^4 + \ldots$ şi $y_n = C_n^1 + 33C_n^3 + 33^2C_n^5 + \ldots$ **1p**

Apoi, dacă $a + b\sqrt{33} = c + d\sqrt{33}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$ şi $b \neq d$, atunci $\sqrt{33} = \frac{a-c}{d-b}$ ar fi raţional – fals – deci $b = d$ şi, apoi, $a = c$, ceea ce arată că scrierea precedentă este unică **1p**

b) Dacă $p = 2, 3$ sau 11, atunci y_p este divizibil cu p **1p**

Pentru celelalte cazuri, începem prin a observa că $x_{n+1} = x_n + 33y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$ **1p**

Apoi, $x_p \equiv 1 \pmod{p}$ şi $y_p \equiv 33^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, deci $y_p^2 \equiv 1 \pmod{p}$ .. **1p**

Deducem $p \mid x_p^2 - y_p^2 = (x_p - y_p)(x_p + y_p) = 32y_{p-1}y_{p+1}$ şi, cum p este prim şi $p \neq 2$, reiese $p \mid y_{p-1}$ sau $p \mid y_{p+1}$ **2p**