**Olimpiada Națională de Matematică**
**Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022**

**CLASA a VII-a – soluții și bareme**

**Problema 1.** *Determinați numerele naturale nenule $n$ cu proprietatea că numărul $6^n$ se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.*

*Soluție.* Observăm că $n=1$ nu convine, dar $n=2$ și $n=3$ au proprietatea dorită, deoarece $6^2=1^3+2^3+3^3$, iar $6^3=3^3+4^3+5^3$. .................................................... **2p**

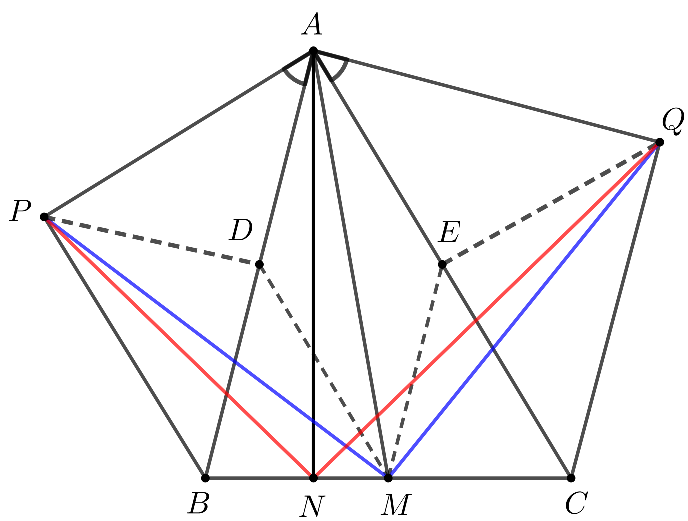
Vom arăta că acestea sunt singurele valori convenabile ale lui $n$. Presupunem, prin absurd, că există $n \geqslant 4$ și $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $6^n=(m-1)^3+m^3+(m+1)^3$. Cum $6^n$ este număr par, rezultă că $m$ trebuie să fie par, prin urmare $m=2k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. După calcule obținem că $6^n=12k\left(2k^2+1\right)$. .................................................... **1p**

Atunci $2^{n-2} \cdot 3^{n-1}=k\left(2k^2+1\right)$. Cum numerele $k$ și $2k^2+1$ sunt prime între ele, al doilea fiind impar, rezultă că $2^{n-2}=k$ și $3^{n-1}=2k^2+1$. .................................................... **2p**

Obținem $3^{n-1}=2^{2n-3}+1$. Însă $2^{2n-3}+1>2^{2n-3}=32 \cdot 4^{n-4}>27 \cdot 3^{n-4}=3^{n-1}$ și ajungem la o contradicție. .................................................... **2p**

**Problema 2.** *Pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului ascuțitunghic $ABC$ se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile $ABP$ și $ACQ$ cu $\sphericalangle P=\sphericalangle Q=90^\circ$ și $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAQ$. Notăm cu $M$ mijlocul laturii $BC$ și cu $N$ piciorul înălțimii din $A$ a triunghiului $ABC$.*

*Demonstrați că punctele $M, N, P$ și $Q$ sunt conciclice.*



*Soluție.* Notăm cu $a$ măsura unghiului $A$ și fie $x = \widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Cum $\widehat{APB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$, punctele $A, P, B$ și $N$ sunt conciclice. Atunci $\widehat{PNA} = \widehat{PBA} = 90^\circ - x$. Analog se arată că $\widehat{QNA} = \widehat{QCA} = 90^\circ - x$, prin urmare $\widehat{PNQ} = 180^\circ - 2x$. ..... **2p**

Fie $D$ și $E$ mijloacele laturilor $AB$, respectiv $AC$. Patrulaterul $ADME$ este un paralelogram, așadar $\widehat{DME} = \widehat{A} = a$. $PD$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic $PAB$, deci $PD = DA$. Deducem că $\widehat{PDA} = 180^\circ - 2x$. Analog, $\widehat{AEQ} = 180^\circ - 2x$. ........ **1p**

În cazul în care punctele $M, D$ și $P$ sunt coliniare, avem că $\widehat{PDA} \equiv \widehat{A}$, de unde $a + 2x = 180^\circ$. Rezultă că punctele $M, E$, $Q$ sunt, și ele, coliniare. Astfel, $\widehat{PMQ} = \widehat{DME} = a = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, așadar punctele $M, N, P$ și $Q$ sunt conciclice. ...................................... **1p**

Dacă punctele $M, D$ și $P$ sunt necoliniare, atunci $a + 2x \neq 180^\circ$, iar punctele $M, E$, $Q$ sunt, și ele, necoliniare. În cele ce urmează, presupunem că $a + 2x < 180^\circ$, cealaltă situație tratându-se similar.

Cum $PD = \dfrac{1}{2}AB = ME$, $DM = \dfrac{1}{2}AC = QE$ și $\widehat{PDM} = \widehat{MEQ} = a + 2x$, triunghiurile $PDM$ și $MEQ$ sunt congruente și, de aici, $\widehat{PMD} \equiv \widehat{MQE}$.

Rezultă că $\widehat{PMQ} = \widehat{PMD} + \widehat{DME} + \widehat{EMQ} = \widehat{MQE} + a + \widehat{EMQ} = a + 180^\circ - \widehat{MEQ} = a + 180^\circ - (a + 2x) = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, deci punctele $M, N, P$ și $Q$ sunt conciclice. ...... **3p**

**Problema 3.** *Pe latura $BC$ a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele $E$ și $F$. Notăm cu $G$ și $H$ punctele în care dreapta $CD$ intersectează dreptele $AE$, respectiv $AF$, și cu $I$ punctul de intersecție a dreptelor $EH$ și $FG$.*

*Demonstrați că dreptele $BD$ și $CI$ sunt paralele.*

*Soluție.* Notăm cu $a$ și $b$ lungimile laturilor $AB$, respectiv $AD$, iar $x$ și $y$ vor fi lungimile segmentelor $CG$, respectiv $CH$. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $x < y$.

Din asemănarea triunghiurilor $ECG$ și $EBA$ obținem că $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{x}{a}$, deci $EC = \dfrac{bx}{a + x}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor $FCH$ și $FBA$ deducem că $CF = \dfrac{by}{a + y}$, iar $BF = \dfrac{ab}{a + y}$. Atunci $EF = CF - CE = \dfrac{ab\,(y - x)}{(a + x)\,(a + y)}$. ................................................ **2p**

Fie $J$ punctul de intersecție a dreptelor $AF$ și $CI$. Folosind teorema lui Ceva în triunghiul $CFH$ și ținând seama de rezultatele de mai înainte, obținem că $\dfrac{FJ}{JH} = \dfrac{a}{a + y}$. Însă din asemănarea triunghiurilor $ABF$ și $HCF$ deducem că $FH = \dfrac{y}{a}AF$, prin urmare $FJ = \dfrac{y}{2a + y}AF$, iar $JH = \dfrac{y\,(a + y)}{a\,(2a + y)}AF$. ........................................................ **3p**

Fie $K$ punctul de intersecție a dreptelor $AF$ și $BD$. Din asemănarea triunghiurilor $ADK$ și $BFK$ obținem $KF = \dfrac{a}{2a + y}AF$, deci $KJ = KF + FJ = \dfrac{a + y}{2a + y}AF$. ..................... **1p**

Atunci $\dfrac{HJ}{JK} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{HC}{CD}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales în triunghiul $HKD$ urmează concluzia problemei. ............................................................... **1p**

**Problema 4.** *Numim* mulțime interesantă *o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.*

*Oricărei mulțimi $A$ îi atașăm mulțimea $\widetilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}$.*

*a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când $A$ parcurge toate mulțimile interesante.*

*b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când $A$ parcurge toate mulțimile interesante.*

*Soluție.* a) Cardinalul maxim al unei mulțimi $\widetilde{A}$ se obține atunci când toate sumele $x + y$, unde $x, y \in A$, sunt distincte. În acest caz, $\left|\widetilde{A}\right| = \dfrac{2022 \cdot 2023}{2}$. ............................ **1p**

Acest maxim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \left\{1, 3, 3^2, \ldots, 3^{2021}\right\}.$$

................................................................................ **1p**

b) Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2022}$ elementele unei mulțimi interesante $A$.

Atunci sumele $a_1 + a_2$, $a_2 + a_2$ și $a_1 + a_3$ sunt distincte; notăm cu $A_1$ mulțimea formată din aceste trei numere. Analog, sumele $a_2 + a_3$, $a_3 + a_3$ și $a_2 + a_4$ sunt distincte; notăm cu $A_2$ mulțimea formată din aceste numere. Observăm că $A_1$ și $A_2$ sunt disjuncte, deoarece $a_2 + a_3$, cel mai mic element al lui $A_2$, este mai mare decât orice element al lui $A_1$.

În aceeași manieră definim mulțimile $A_3, A_4, \ldots, A_{2020}$, disjuncte două câte două. Atunci

$$\{a_1 + a_1\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2020} \cup \{a_{2021} + a_{2022}, a_{2022} + a_{2022}\} \subset \widetilde{A}.$$

Rezultă că $\left|\widetilde{A}\right| \geqslant 1 + 3 \cdot 2020 + 2 = 6063$. ............................................ **3p**

Acest minim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 3031, 3032\}.$$

Mulțimea atașată este $\widetilde{A} = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 6064\}$, de cardinal 6063. ........................ **2p**