MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că numărul 6^n se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.

Problema 2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile ABP și ACQ cu $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90^\circ$ și $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAQ$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.

Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt conciclice.

Problema 3. Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E și F. Notăm cu G și H punctele în care dreapta CD intersectează dreptele AE, respectiv AF, și cu I punctul de intersecție a dreptelor EH și FG.

Demonstrați că dreptele BD și CI sunt paralele.

Problema 4. Numim *mulțime interesantă* o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.

Oricărei mulțimi A îi atașăm mulțimea

$$\widetilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}.$$

a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.