MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) Determinați toate funcțiile din $\mathcal{F}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Dați un exemplu de funcție $f \in \mathcal{F}$, integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neconstantă, cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Problema 2. Determinați toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x^3 \in \{0, 1\}$ pentru orice element $x \in A$.

Problema 3. Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare.
a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $b \in [f(a-0), f(a+0)]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f(t)\, dt \geq b(x-a)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $[f(a-0), f(a+0)] \cap [g(a-0), g(a+0)] \neq \emptyset$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arătați că

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt\,, \qquad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(Prin $u(a-0)$ și $u(a+0)$ am notat limitele la stânga, respectiv la dreapta ale unei funcții u în punctul $a \in \mathbb{R}$.)

Problema 4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R \mid ar = ra,\ \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătați că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}\,.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulțimii M.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.