Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Piatra-Neamţ, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a – soluţii şi bareme

Problema 1. *Fie $f:[0,1]\to(0,1)$ o funcţie surjectivă.*

a) Demonstraţi că f are cel puţin un punct de discontinuitate.

b) Arătaţi că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0,1]$, atunci f are cel puţin două puncte de discontinuitate.

Soluţie.

a) Conform teoremei lui Weierstrass, dacă f este continuă pe intervalui $[0,1]$, atunci $f([0,1])=[m,M]$, unde $m=\min_{x\in[0,1]}f(x)\in(0,1)$ şi $M=\max_{x\in[0,1]}f(x)\in(0,1)$. Prin urmare, $f([0,1])\neq(0,1)$, deci f nu este surjectivă. Contradicţie. Deci f are cel puţin un punct de discontinuitate 2p

b) Presupunem că f are limită în orice punct din $[0,1]$. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Cum f este surjectivă şi $\frac{1}{n+1}\in(0,1)$, există $a_n\in[0,1]$ astfel ca $f(a_n)=\frac{1}{n+1}$. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel determinat este mărginit. Conform Lemei lui Cesàro, şirul admite un subşir convergent $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n\to\infty}a_{k_n}=a\in[0,1]$. Dacă f ar fi continuă în a, atunci

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_{k_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n+1}=0.$$

Contradicţie. Deci f este discontinuă în a. 2p

Analog, pe baza surjectivităţii lui f, putem construi un şir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu termenii în $[0,1]$, astfel ca $f(b_n)=1-\frac{1}{n+1}\in(0,1)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, care admite un subşir convergent $(b_{\ell_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n\to\infty}b_{\ell_n}=b\in[0,1]$. Dacă f ar fi continuă în b, atunci

$$f(b)=\lim_{n\to\infty}f\left(b_{\ell_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell_n+1}\right)=1.$$

Contradicţie. Deci f este discontinuă în b. 2p

Arătăm că $a\neq b$.

Cum $f(a)\in(0,1)$, există $n_1\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $f\left(a_{k_n}\right)=\frac{1}{k_n+1}<f(a)$, $\forall\, n\geq n_1$. Rezultă $a_{k_n}\neq a$, $\forall\, n\geq n_1$. Cum f are limită în punctul a, obţinem $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_{k_n}\right)=0$. Cu un raţionament analog, deducem $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(b_{\ell_n}\right)=1$.

Rezultă $a\neq b$, deci f are cel puţin două puncte de discontinuitate. 1p

Problema 2. *Fie $\mathcal{F}$ mulţimea perechilor de matrice $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi există matricele $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A,B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A,B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiţia de mai sus.*

a) Fie $(A,B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0,\ \det(B) \neq 0$ şi $k(A,B) = p+2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $AB^pA = O_2$.

b) Demonstraţi că pentru orice $k \geq 3$ există $(A,B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A,B) = k$.

Soluţie.

a) $k(A,B) > 1$ şi $\det(A) = 0$ implică $A \neq O_2$ şi $\operatorname{rang}(A) = 1$. 1p

Deoarece $k(A,B) = p+2$, există matricele $C_1, C_2, \ldots, C_{p+2} \in \{A,B\}$ cu proprietatea $C_1C_2 \cdots C_{p+2} = O_2$. Dacă $C_1 = B$, atunci $C_2 \cdots C_{p+2} = B^{-1}(BC_2 \cdots C_{p+2}) = O_2$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $k(A,B)$. Similar, dacă presupunem $C_{p+2} = B$, atunci $C_1C_2 \cdots C_{p+1} = (C_1C_2 \cdots C_{p+1}B)\,B^{-1} = O_2$, în contradicţie cu minimalitatea lui $k(A,B)$. Deci $C_1 = C_{p+2} = A$. 1p

Presupunem prin absurd că există $i \in \{2, \ldots, p+1\}$ astfel ca $C_i = A$. Fie matricele $X = C_1 \cdots C_{i-1}$ şi $Y = C_{i+1} \cdots C_{p+2}$. Avem deci $XAY = O_2$. Din inegalitatea lui Frobenius, obţinem

$$\operatorname{rang}(XA) + \operatorname{rang}(AY) \leq \operatorname{rang}(XAY) + \operatorname{rang}(A) = 1.$$

Atunci $XA = O_2$ sau $AY = O_2$, în contradicţie cu minimalitatea lui $k(A,B)$. Prin urmare $C_i = B,\ i = 2, \ldots, p+1$. Rezultă $AB^pA = O_2$. 2p

b) Fie $k = p+2$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, fixat. Considerăm matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definim matricea $B = (2^p - 1)PMP^{-1}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$B^n = (2^p-1)^n PM^nP^{-1} = (2^p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2^p \end{pmatrix} =$$

$$= (2^p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 2^{p+n} - 2^p \\ 1 - 2^n & 2^{n+p} - 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$AB^nA = (2^p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB^nA = O_2$ dacă şi numai dacă $n = p$. Din a), deducem $k(A,B) = p+2 = k$.
.... 3p

Problema 3. *Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea*

$$f(x+y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile din enunţ. Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci g este derivabilă în origine, $g(0) = 0$ şi

$$g(x+y) + g(xy) \geq g(x) + g(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Din (1) obţinem inegalităţile

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \ \forall\, y > 0; \tag{2}$$

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \ \forall\, y < 0. \tag{3}$$

....1p

Din (1) rezultă de asemenea

$$g(x) + g(-y(x+y)) \geq g(x+y) + g(-y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(-y(x+y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \ \forall\, y > 0; \tag{4}$$

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(-y(x+y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \ \forall\, y < 0. \tag{5}$$

....2p

Din ipoteză, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = g'(0) \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $x \in \mathbb{R}^*$, au loc limitele

$$\lim_{y\searrow 0} \left(\frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y} \right) = \lim_{y\searrow 0} \frac{g(y)}{y} - x \lim_{y\searrow 0} \frac{g(xy)}{xy} = g'(0)(1-x)$$

şi

$$\lim_{y\searrow 0} \left(\frac{g(-y(x+y))}{y} - \frac{g(-y)}{y} \right) = -\lim_{y\searrow 0} (x+y) \cdot \frac{g(-y(x+y)))}{-y(x+y)} + \lim_{y\searrow 0} \frac{g(-y)}{-y} = g'(0)(1-x).$$

Atunci, din inegalităţile (2) şi (4), prin aplicarea criteriului cleşte, rezultă că funcţia g este derivabilă la dreapta în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la dreapta $g'_d(x) = g'(0)(1-x)$. Similar, din inegalităţile (3) şi (5), prin aplicarea criteriului cleşte, rezultă că funcţia g este derivabilă la stânga în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la stânga $g'_s(x) = g'(0)(1-x)$. Rezultă că g este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x) = g'(0)(1-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. 2p

Deducem: $g(x) = -\frac{g'(0)}{2}(x-1)^2 + \frac{g'(0)}{2},\ x \in \mathbb{R}$....................................1p

Notăm $a = -\frac{g'(0)}{2}$ şi $b = f(0) - a$. Atunci $f(x) = g(x) + f(0) = a(x-1)^2 + b,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. În acest caz, inegalitatea din ipoteză se reduce la $ax^2y^2 \geq 0,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcţiile f care satisfac condiţiile din enunţ sunt de forma:

$$f(x) = a(x-1)^2 + b,\ x \in \mathbb{R},$$

unde $a \geq 0$ şi $b \in \mathbb{R}$..1p

Notă. Pentru indicarea funcţiei f de forma de mai sus, fără justificare, se acordă 1p.

Problema 4. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătaţi că*

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Soluţia 1.

Analizăm cazul când matricele A şi B sunt inversabile.

Din relaţia $A^2 + B^2 = 2AB$ obţinem $AB^{-1} + A^{-1}B = 2I_n$. Notăm $X = A^{-1}B$. Relaţia devine $BX^{-1}B^{-1} = 2I_n - X$. Prin urmare, pentru orice $x \in \mathbb{C}$, avem

$$\det(2I_n - X - xI_n) = \det(BX^{-1}B^{-1} - xI_n) = \det(B(X^{-1} - xI_n)B^{-1}) = \det(X^{-1} - xI_n).$$

Rezultă că matricele $2I_n - X$ şi X^{-1} au acelaşi spectru. Fie $Y = I_n - X$. Atunci avem $2I_n - X = I_n + Y$ şi $X^{-1} = (I_n - Y)^{-1}$, deci matricele $I_n + Y$ şi $(I_n - Y)^{-1}$ au spectrul comun..2p

Pentru o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $\sigma(M)$ mulţimea valorilor sale proprii.

Fie $\alpha \in \sigma(Y)$. Atunci $1 + \alpha \in \sigma(I_n + Y) = \sigma\left[(I_n - Y)^{-1}\right]$. Rezultă că există $\beta \in \sigma(Y)$ astfel ca $1 + \alpha = (1 - \beta)^{-1}$, deci $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Prin urmare, $\frac{\alpha}{1+\alpha} \in \sigma(Y)$. Prin inducţie, obţinem $\frac{\alpha}{1+k\alpha} \in \sigma(Y),\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Dacă presupunem, prin absurd, $\alpha \neq 0$, atunci ar rezulta că Y ar avea o infinitate de valori proprii. Contradicţie. Deci $\sigma(Y) = \{0\}$, de unde $\det(X) = \det(I_n - Y) = 1$. Rezultă $\det(A) = \det(B)$...........................3p

Analizăm cazul general. Relaţia din ipoteză poate fi scrisă

$$(A - xI_n)^2 + (B - xI_n)^2 = 2(A - xI_n)(B - xI_n).$$

Dacă $x \in \mathbb{C}$ nu este valoare proprie pentru A şi B, atunci matricele $A - xI_n$ şi $B - xI_n$ sunt inversabile. În conformitate rezultatul anterior, obţinem $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$. Această egalitate polinomială este adevărată pentru o infinitate de numere complexe.

Ca urmare $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),\ \forall\, x \in \mathbb{C}$..................................2p

Soluţia 2.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Notăm $A_\lambda = A - \lambda I_n$ şi $B_\lambda = B - \lambda I_n$. Conform ipotezei, obţinem relaţia $A_\lambda^2 + B_\lambda^2 = 2A_\lambda B_\lambda$ 1p

Prin inducţie, se demonstrează relaţiie

$$A_\lambda^{i+1} = [(i+1)A_\lambda - iB_\lambda]B_\lambda^i,\ i \in \mathbb{N}^*,$$

$$B_\lambda^{i+1} = A_\lambda^i[(i+1)B_\lambda - iA_\lambda],\ i \in \mathbb{N}^*.$$

.... 2p

Rezultă $\operatorname{rang}\left(A_\lambda^{i+1}\right) \leq \operatorname{rang}\left(B_\lambda^i\right),\ \operatorname{rang}\left(B_\lambda^{i+1}\right) \leq \operatorname{rang}\left(A_\lambda^i\right),\ \forall\, i \in \mathbb{N}^*$ 1p

Dacă λ este o valoare proprie a matricei A, notăm cu a ordinul său de multiplicitate, iar dacă λ nu este o valoare proprie a matricei A, atunci considerăm $a = 0$. Similar, dacă λ este o valoare proprie a matricei B, notăm cu b ordinul său de multiplicitate şi alegem $b = 0$ în caz contrar. Pentru $i \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare, rangurile matricelor A_λ^i şi B_λ^i se stabilizează astfel: $\operatorname{rang}\left(A_\lambda^i\right) = n - a$, respectiv $\operatorname{rang}\left(B_\lambda^i\right) = n - b$. Rezultă $n - a \leq n - b$ şi $n - b \leq n - a$, de unde $a = b$. 2p

Deducem că matricele A şi B au aceleaşi valori proprii, cu ordine de multiplicitate identice, deci au acelaşi polinom caracteristic. Astfel, obţinem concluzia....................... 1p