MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Piatra-Neamţ, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $f:[0,1]\to(0,1)$ o funcţie surjectivă.

a) Demonstraţi că f are cel puţin un punct de discontinuitate.

b) Arătaţi că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0,1]$, atunci f are cel puţin două puncte de discontinuitate.

Problema 2. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea perechilor de matrice $(A,B)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k\in\mathbb{N}^*$ şi există matricele $C_1,C_2,\ldots,C_k\in\{A,B\}$ astfel încât $C_1C_2\cdots C_k=O_2$. Pentru $(A,B)\in\mathcal{F}$, notăm $k(A,B)$ cel mai mic număr $k\in\mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiţia de mai sus.

a) Fie $(A,B)\in\mathcal{F}$, astfel încât $\det(A)=0,\ \det(B)\neq 0$ şi $k(A,B)=p+2$, cu $p\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $AB^pA=O_2$.

b) Demonstraţi că pentru orice $k\geq 3$ există $(A,B)\in\mathcal{F}$ astfel încât $k(A,B)=k$.

Problema 3. Determinaţi funcţile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabile în $x=0$, care verifică inegalitatea

$$f(x+y)+f(xy)\geq f(x)+f(y),$$

pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2+B^2=2AB$. Arătaţi că

$$\det(A-xI_n)=\det(B-xI_n),$$

pentru orice $x\in\mathbb{C}$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.