

Fie  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , astfel încât  $f(X) = O_2$ . Atunci  $f(O_3) = f(X \cdot O_3) = f(X)f(O_3) = O_2$ . Considerăm  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  matricea de la punctul a) și  $B = f(A) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Atunci  $B^2 = f(A^2)$  și cum  $A^2 \neq O_3$ , deducem din injectivitatea lui  $f$  că  $B^2 \neq O_2$ . În particular,  $\det(B) \neq 0$ . Cum  $B^3 = f(A^3) = O_2$  și  $B^2 - \text{tr}(B) \cdot B + \det(B) \cdot I_2 = O_2$ , rezultă că  $B^4 - \text{tr}(B)B^3 + \det(B) \cdot B^2 = O_2$ , deci  $B^2 = O_2$ , contradicție.

Rezultă  $n = p$ .

4. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  și presupunem  $f(a) > f(b)$ . Cum  $f(a+0) \geq f(a) > f(b)$ ,  $\exists c \in (a, b)$ , astfel încât  $f(x) > f(b)$ , pentru orice  $x \in (a, c)$ . Atunci  $f(c-0) \geq f(b) \geq f(b-0)$ , în contradicție cu proprietatea (ii) aplicată punctelor  $c$  și  $b$ . Rezultă că  $f(a) \leq f(b)$  pentru orice  $a < b$ , deci  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

Dacă există  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $a < b$  și  $f(a) = f(b)$ , atunci  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ , deci, pentru orice  $c \in (a, b)$  avem  $f(c-0) = f(b-0)$ , în contradicție cu (ii). Rezultă că  $f(a) < f(b)$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $a < b$ , deci  $f$  este strict crescătoare.

#### Clasa a XII-a

1. a) Pentru  $s < k$  luăm  $p_0 = \dots = p_{s-1} = 0$ ,  $p_s = 1$  și  $p_{s+1} = \dots = p_{k-1} = 0$ . Pentru  $s = k$ ,  $a^k = 1 + a + 0 \cdot a^2 + \dots + 0 \cdot a^{k-1}$ . Pentru  $s > k$ , presupunem proprietatea adevărată pentru  $s-1$  și atunci  $a^s = a \cdot a^{s-1} = a(p_0 + p_1 a + \dots + p_{k-1} a^{k-1}) = p_0 a + p_1 a^2 + \dots + p_{k-2} a^{k-1} + p_{k-1} a^k = p_{k-1} + (p_{k-1} + p_0)a + p_1 a^2 + \dots + p_{k-2} a^{k-1}$ , deci proprietatea este adevărată pentru orice  $s \in \mathbb{N}^*$ .

b) Cum  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$ , rezultă că pentru orice  $x \in A$  și  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$px = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{p \text{ ori}} x = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{r \text{ ori}} x = rx \text{ unde } r = p \pmod{n}.$$

Fie  $M = \{r_0 + r_1 a + \dots + r_{k-1} a^{k-1} \mid 0 \leq r_i < n\}$ . Din punctul a) și observația anterioară, rezultă că  $a^s \in M, \forall s \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $M$  este finită,  $\exists i, j \in \mathbb{N}^*$  cu  $i < j$ , astfel încât  $a^i = a^j$ . Din relația  $a(a^{k-1} - 1) = (a^{k-1} - 1)a = 1$ , rezultă că  $a$  este inversabil, deci  $a^i$  este inversabil. Obținem  $a^m = 1$ , unde  $m = j - i \geq 1$ .

2. a) Notăm cu  $|M|$  numărul elementelor mulțimii finite  $M$ . Cum  $|A_n| = 2^n \neq 2^m = |A_m|$ , rezultă că nu există nici o bijecție  $f: A_n \rightarrow A_m$ , deci  $A_n$  și  $A_m$  nu sunt izomorfe pentru  $n \neq m$ . Fie  $f_n: A_1 \rightarrow A_n$ ,  $f_n(a) = (a, a, \dots, a)$ , pentru  $a \in A_1$  și  $g_n: A_n \rightarrow A_1$ ,  $g_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1$ , pentru  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$ . Cum  $f_n$  și  $g_m$  sunt morfisme de inele, rezultă că aplicația  $f_n \circ g_m: A_m \rightarrow A_n$  este morfism de inele.

b) Pentru  $n \geq 1$  considerăm  $B = \mathbb{Z}_{p_n}$ , unde  $p_n$  este al  $n$ -lea număr

prim. Să presupunem că există  $f : B_n \rightarrow B_m$ , cu  $n \neq m$ , morfism de inele. Atunci:  $\bar{0} = f(\hat{0}) = f(\widehat{p_n}) = f(\underbrace{\widehat{1} + \widehat{1} + \dots + \widehat{1}}_{p_n \text{ ori}}) = p_n f(\widehat{1}) = p_n \cdot \bar{1} = \bar{p_n}$ . deci  $p_m$  divide  $p_n$ , contradicție. Deci pentru  $n \neq m$ , nu există morfisme de inele de la  $B_n$  în  $B_m$ .

3. a)  $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha \ln \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^\alpha \ln(1-x^n) dx - \int_0^\alpha \ln(1-x) dx$ . Cum  $\ln(1-\alpha^n) \leq \ln(1-x^n) \leq 0$ , pentru orice  $x \in [0, \alpha]$ , rezultă că  $\alpha \ln(1-\alpha^n) \leq \int_0^\alpha \ln(1-x^n) dx \leq 0$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \ln(1-\alpha^n) = 0$ , rezultă că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \ln(1-x^n) dx = 0, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = - \int_0^\alpha \ln(1-x) dx = \int_1^{1-\alpha} \ln t dt = (t \ln t - t) \Big|_1^{1-\alpha} = (1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha.$$

b) Cum pentru  $\alpha \in (0, 1)$  șirul  $(I_n(\alpha))_{n \geq 2}$  este crescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = (1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha$ , rezultă că  $I_n(\alpha) \leq (1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha$ , pentru orice  $n \geq 2$ .

Cum pentru fiecare  $n \geq 2$  funcția  $I_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha \ln(1+x+\dots+x^{n-1}) dx$  este continuă în 1, rezultă că  $0 \leq I_n(1) = \lim_{\alpha \nearrow 1} I_n(\alpha) \leq \lim_{\alpha \nearrow 1} [(1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha] = 1, \forall n \geq 2$ .

Cum  $(I_n(1))_{n \geq 2}$  este mărginit și crescător, rezultă că este convergent.

Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(1)$ . Considerăm  $\alpha \in (0, 1)$ . Cum  $I_n(\alpha) = I_n(1) - \int_\alpha^1 \ln(1+x+\dots+x^{n-1}) dx \leq I_n(1)$ , pentru orice  $n \geq 2$ , obținem că  $I_n(\alpha) \leq I_n(1) \leq 1$ , pentru orice  $n \geq 2$ . Trecând la limită când  $n \rightarrow \infty$  în inegalitatea precedentă, obținem:  $(1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha \leq l \leq 1, \forall \alpha \in (0, 1)$ .

Atunci  $1 = \lim_{\alpha \nearrow 1} [(1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha] \leq l \leq 1$ , deci  $l = 1$ .

$$\begin{aligned} 4. \text{ a) } \int_a^{a+1} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{a+1} f(x) dx = \int_{a+1}^1 f(t-1) dt + \int_0^{a+1} f(x) dx = \\ &= \int_{a+1}^1 f(x) dx + \int_0^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

b) Fie  $I_n = \int_0^1 f(x)f(nx)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx$ . Cum  $f(x) \geq 0$ ,

$x \in \mathbb{R}$ , aplicând teorema de medie pentru fiecare integrală din sumă, obținem existența unui  $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ , astfel încât:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)f(nx)dx = f(c_k) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(nx)dx = \frac{1}{n}f(c_k) \int_{k-1}^k f(x)dx = \frac{1}{n}f(c_k) \int_0^1 f(x)dx.$$

Atunci  $I_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k)\right) \int_0^1 f(x)dx$  și cum  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k)$  este suma

Riemann a lui  $f$  relativă la diviziunea  $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$  cu punctele

intermediare  $(c_k)_{k=1, \dots, n}$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$ .

## PROBLEME

### PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

#### Clasa a V-a

**Problema E:12166** (G.M. 5-6/2001, pag. 242)

Suma a 45 de numere naturale impare este 2001.

Demonstrați că cel puțin două dintre acestea sunt egale.

Daniel Fcher, Sebeș, Alba

*Soluție.* Dacă numerele ar fi distincte, suma ar fi cel puțin:

$$a = 1 + 3 + 5 + \dots + 85 + 87 + 89.$$

Pe de altă parte  $a = 89 + 87 + 85 + \dots + 5 + 3 + 1$ .

Adunând cele două relații, obținem:

$$2a = \underbrace{90 + 90 + 90 + \dots + 90 + 90 + 90}_{15 \text{ termeni}}$$

de unde  $2a = 45 \cdot 90 \Rightarrow a = 45 \cdot 45 = 2025 > 2001$ , contradicție.

**Problema E:12167** (G.M. 5-6/2001, pag. 242)

Determinați  $a, b \in \mathbb{N}$  știind că  $21 \cdot a = 5 \cdot b$  și  $[a, b] = 1260$ .

Victor Ailioaici, Vaslui