3. a) Să se găsească o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 \neq O_3$ şi $A^3 = O_3$.

b) Fie $n, p \in \{2, 3\}$. Să se arate că dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ cu proprietatea $f(XY) = f(X)f(Y)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $n = p$.

I.Savu, Bucureşti

4. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisface condiţiile:

(i) f are limite laterale în orice punct $a \in \mathbb{R}$ şi
$$f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0);$$
(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, avem $f(a-0) < f(b-0)$.

Să se demonstreze că f este strict crescătoare.

M.Piticari, Câmpulung Moldovenesc şi *S.Rădulescu*, Bucureşti

Clasa a XII-a

1. Fie A un inel, $a \in A$, n şi k numere naturale, $n \geq 2$, $k \geq 2$, astfel încât $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} = 0$ şi $a^k = a + 1$. Să se arate că:

a) oricare ar fi $s \in \mathbb{N}^*$, există $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1} \in \mathbb{N}$, astfel ca
$$a^s = p_0 + p_1 a + \ldots + p_{k-1} a^{k-1};$$

b) există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $a^m = 1$.

M.Andronache, Bucureşti

2. a) Se consideră inelele $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ unde $A_n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{\text{de } n \text{ ori } \mathbb{Z}_2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, pentru orice $n \neq m$, inelele A_n şi A_m nu sunt izomorfe şi că există un morfism de inele $f : A_n \to A_m$.

b) Să se arate că există inelele $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ astfel ca, pentru orice $n \neq m$, să nu existe morfisme de inele $f : B_n \to B_m$.

B.Berceanu, Bucureşti

3. Pentru fiecare $\alpha \in (0, 1]$ notăm
$$I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} \ln(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 2.$$
Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)$, pentru $\alpha \in (0, 1)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(1)$.

M.Piticari, Câmpulung Moldovenesc

4. Fie $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă 1. Să se arate că:

a) $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)f(nx)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

C.Mortici, Târgovişte

Soluţii

Clasa a VII-a

1. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, astfel încât x, y, z sunt direct proporţionale cu $n-1$, n şi $n+1$. Atunci, $\dfrac{x}{n-1}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{n+1}=\dfrac{x+y+z}{3n}=\dfrac{60}{n}$. De aici rezultă $y=60$, $x=60\cdot\dfrac{n-1}{n}$ şi $z=60\cdot\dfrac{n+1}{n}$. Cum $(n,n+1)=1$, rezultă $n\mid 60$, deci $n\in\{2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$. Cum pentru fiecare valoare posibilă a lui n obţinem o scriere a lui 180 sub forma $x+y+z$, iar aceste scrieri sunt distincte, rezultă că numărul căutat este 11.

2. a) Notăm cu d_i modulul diferenţei dintre punctajele a doi elevi la întrebarea i. Atunci $d_i=0$, dacă ambii au răspuns corect sau ambii au răspuns greşit şi $d_i=2i$, dacă unul a răspuns corect şi celălalt a răspuns greşit.

Rezultă că modulul diferenţei a două punctaje totale distincte este cel puţin 2. Minimul căutat este 2 şi el se realizează atunci când, de exemplu, un elev a răspuns corect la toate întrebările, iar altul a greşit răspunsul numai la prima întrebare.

b) Punctajul maxim este $1+2+3+4+5+6=21$, iar punctajul minim este -21. Cum diferenţa dintre două punctaje este un număr par, rezultă că toate punctajele sunt numere impare şi aparţin mulţimii $\{-21,-19,-17,\dots,17,19,21\}$, deci există cel mult 22 de posibilităţi de punctaje. Cum sunt 67 de elevi, atunci cel puţin 4 au acelaşi punctaj, deoarece în caz contrar, ar fi cel mult 66 de elevi.

c) Cum un punctaj este de forma $\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6$, pentru o anumită alegere a semnelor $+$ şi $-$, rezultă că sunt $2^6=64$ posibilităţi de răspuns. Cum sunt 67 de elevi, rezultă că cel puţin doi elevi au dat răspunsuri identice.

3. a) Fie D, E şi F mijloacele segmentelor paralele cu BC, AC şi respectiv AB (vezi figura, pag. 64).