

$\{1, 2, 2^2, \dots, 2^p, 2^p + 1\}$ satisface condițiile din enunț și are $p + 2$ elemente; atunci $f(2^p + 1) = p + 2$.

Pentru $n = 2^p + 2$, avem analog $f(2^p + 2) \geq p + 2$. Mulțimea $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^p, 2^p + 2\}$ satisface ipotezele și are $p + 2$ elemente, deci $f(2^p + 2) = p + 2$.

În concluzie, $f(2^p + 1) = f(2^p + 2)$ pentru o infinitate de valori ale lui p .

Clasa a XI-a

1. a) Fie $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a + \sqrt{b}}}}$ și $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a + x}$. Atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este dat de relația de recurență: $x_1 = \sqrt{b}$ și $x_{n+1} = f(x_n)$. Funcția f are un unic punct fix în $[0, \infty)$, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Distingem cazurile:

i) $\sqrt{b} \leq \alpha$. Atunci $x_2 - x_1 = f(x_1) - x_1 = \sqrt{a + x_1} - x_1 = \frac{a + x_1 - x_1^2}{\sqrt{a + x_1} + x_1} = \frac{(\alpha - x_1)(x_1 - \beta)}{\sqrt{a + x_1} + x_1} \geq 0$, unde $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Cum $x_2 \geq x_1$ și f este crescătoare, rezultă $f(x_2) \geq f(x_1)$, deci $x_3 \geq x_2$. Obținem, prin inducție, că $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \geq 1$, deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător.

Cum $x_1 \leq \alpha$, rezultă $f(x_1) \leq f(\alpha)$, deci $x_2 \leq \alpha$. Obținem, prin inducție, că $x_n \leq \alpha$, $\forall n \geq 1$, deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

ii) $\sqrt{b} > \alpha$. Atunci $x_2 < x_1$ și, prin inducție, obținem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. Cum $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior, rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Fie $l \in \mathbb{R}$, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Cum $x_{n+1} = f(x_n)$ și f este continuă, rezultă că $f(l) = l$, deci $l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

b) (i) Relația din enunț este echivalentă cu $x_1 = \sqrt{a_1}$ și $x_{n+1}^2 = a_{n+1} + x_n$, $n \geq 1$. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, considerăm $M > 0$, astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$. Obținem $0 < a_n < a_n + x_{n-1} = x_n^2 \leq M^2$, $\forall n \geq 2$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit și $a_n \leq p$, $\forall n \geq 1$, atunci $0 < x_n \leq \sqrt{p + \sqrt{p + \dots + \sqrt{p}}} = y_n$. Cum $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent, deci mărginit superior, rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

(ii) Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, atunci din relația $a_n = x_n^2 - x_{n-1}$, $n \geq 2$, rezultă că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Reciproc, fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Distingem cazurile:

u) $L > 0$. Fie $0 < \varepsilon < \sqrt{L}$ și $L_1 = L - \varepsilon^2$, $L_2 = L + \varepsilon^2$. Cum $a_n \rightarrow L$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $L_1 < a_n < L_2$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

$$\text{Atunci } u_n = \underbrace{\sqrt{L_1 + \sqrt{L_1 + \dots + \sqrt{L_1}}}}_{n-n_\varepsilon \text{ radicali}} < x_n < \underbrace{\sqrt{L_2 + \sqrt{L_2 + \dots + \sqrt{L_2 + \sqrt{M + \sqrt{M + \dots + \sqrt{M}}}}}}_{(n-n_\varepsilon+1) \text{ radicali}} = v_n, \forall n > n'_\varepsilon.$$

$$\text{Cum } u_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{1+4L_1}}{2} \text{ și } v_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{1+4L_2}}{2}, \text{ și}$$

$$\frac{1 + \sqrt{1+4L_1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1+4(L-\varepsilon^2)}}{2} > \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} - \varepsilon, \text{ iar}$$

$$\frac{1 + \sqrt{1+4L_2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1+4(L+\varepsilon^2)}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} + \varepsilon, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}.$$

$$\text{astfel încât } u_n > \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} - \varepsilon \text{ și } v_n < \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} + \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon.$$

Pentru $n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, obținem:

$$\frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} - \varepsilon < x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2} + \varepsilon, \text{ deci } x_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{1+4L}}{2}.$$

v) Dacă $L = 0$, atunci:

$$x_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \dots + \sqrt{a_1}}} > \sqrt[n]{a_1} = a_1^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Cu același raționament de majorare pentru $L_2 = \varepsilon^2$, obținem:

$$1 - \varepsilon \leq x_n \leq 1 + \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \text{ deci } x_n \rightarrow 1.$$

2. a) Fie $1 \leq i < j < k$. Atunci panta dreptei $A_i A_j$ este $m_1 = \frac{j^3 - i^3}{j - i} = j^2 + ij + i^2$. Analog, panta dreptei $A_j A_k$ este $m_2 = k^2 + jk + j^2$.

Punctele A_i, A_j, A_k sunt coliniare $\Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow j^2 + ij + i^2 = k^2 + jk + j^2 \Leftrightarrow (k - i)(k + j + i) = 0 \Leftrightarrow k = i$, fals, deci A_i, A_j, A_k nu sunt coliniare.

b) dacă $\alpha_i = \mu(\widehat{A_i O B})$, atunci $\text{tg} \alpha_i = \frac{1}{i^2}$, deci $\alpha_i = \text{arctg} \frac{1}{i^2}$. Fie

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k = p. \text{ Atunci } \sum_{j=1}^k \alpha_{i_j} \leq \sum_{j=1}^p \alpha_j = \sum_{j=1}^p \text{arctg} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=1}^p \text{arctg} \frac{1}{j^2 - j + 1} = \sum_{j=1}^p (\text{arctg} j - \text{arctg}(j - 1)) = \text{arctg} p < \frac{\pi}{2}.$$

3. a) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$ și

$$A^3 = O^3.$$

b) Presupunem $n \neq p$. Cum funcția $f^{-1} : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are aceeași proprietate cu funcția f , putem considera că $n = 3$ și $p = 2$.

Fie $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $f(X) = O_2$. Atunci $f(O_3) = f(X \cdot O_3) = f(X)f(O_3) = O_2$. Considerăm $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ matricea de la punctul a) și $B = f(A) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci $B^2 = f(A^2)$ și cum $A^2 \neq O_3$, deducem din injectivitatea lui f că $B^2 \neq O_2$. În particular, $\det(B) \neq 0$. Cum $B^3 = f(A^3) = O_2$ și $B^2 - \text{tr}(B) \cdot B + \det(B) \cdot I_2 = O_2$, rezultă că $B^4 - \text{tr}(B)B^3 + \det(B) \cdot B^2 = O_2$, deci $B^2 = O_2$, contradicție.

Rezultă $n = p$.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și presupunem $f(a) > f(b)$. Cum $f(a+0) \geq f(a) > f(b)$, $\exists c \in (a, b)$, astfel încât $f(x) > f(b)$, pentru orice $x \in (a, c)$. Atunci $f(c-0) \geq f(b) \geq f(b-0)$, în contradicție cu proprietatea (ii) aplicată punctelor c și b . Rezultă că $f(a) \leq f(b)$ pentru orice $a < b$, deci f este crescătoare pe \mathbb{R} .

Dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$ și $f(a) = f(b)$, atunci f este constantă pe $[a, b]$, deci, pentru orice $c \in (a, b)$ avem $f(c-0) = f(b-0)$, în contradicție cu (ii). Rezultă că $f(a) < f(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, deci f este strict crescătoare.

Clasa a XII-a

1. a) Pentru $s < k$ luăm $p_0 = \dots = p_{s-1} = 0$, $p_s = 1$ și $p_{s+1} = \dots = p_{k-1} = 0$. Pentru $s = k$, $a^k = 1 + a + 0 \cdot a^2 + \dots + 0 \cdot a^{k-1}$. Pentru $s > k$, presupunem proprietatea adevărată pentru $s-1$ și atunci $a^s = a \cdot a^{s-1} = a(p_0 + p_1 a + \dots + p_{k-1} a^{k-1}) = p_0 a + p_1 a^2 + \dots + p_{k-2} a^{k-1} + p_{k-1} a^k = p_{k-1} + (p_{k-1} + p_0)a + p_1 a^2 + \dots + p_{k-2} a^{k-1}$, deci proprietatea este adevărată pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$.

b) Cum $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$, rezultă că pentru orice $x \in A$ și $p \in \mathbb{N}^*$,

$$px = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{p \text{ ori}} x = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{r \text{ ori}} x = rx$$
 unde $r = p \pmod{n}$.

Fie $M = \{r_0 + r_1 a + \dots + r_{k-1} a^{k-1} \mid 0 \leq r_i < n\}$. Din punctul a) și observația anterioară, rezultă că $a^s \in M, \forall s \in \mathbb{N}^*$. Cum M este finită, $\exists i, j \in \mathbb{N}^*$ cu $i < j$, astfel încât $a^i = a^j$. Din relația $a(a^{k-1} - 1) = (a^{k-1} - 1)a = 1$, rezultă că a este inversabil, deci a^i este inversabil. Obținem $a^m = 1$, unde $m = j - i \geq 1$.

2. a) Notăm cu $|M|$ numărul elementelor mulțimii finite M . Cum $|A_n| = 2^n \neq 2^m = |A_m|$, rezultă că nu există nici o bijecție $f: A_n \rightarrow A_m$, deci A_n și A_m nu sunt izomorfe pentru $n \neq m$. Fie $f_n: A_1 \rightarrow A_n$, $f_n(a) = (a, a, \dots, a)$, pentru $a \in A_1$ și $g_n: A_n \rightarrow A_1$, $g_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1$, pentru $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$. Cum f_n și g_m sunt morfisme de inele, rezultă că aplicația $f_n \circ g_m: A_m \rightarrow A_n$ este morfism de inele.

b) Pentru $n \geq 1$ considerăm $B = \mathbb{Z}_{p_n}$, unde p_n este al n -lea număr