

3. Fie  $a$  și  $b$  două numere reale care satisfac relațiile  $3^a + 13^b = 17^a$  și  $5^a + 7^b = 11^b$ . Demonstrați că  $a < b$ .

*C. Mortici, Târgoviște*

4. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , notăm cu  $f(n)$  numărul minim de elemente ale unei mulțimi  $S$  care îndeplinește simultan condițiile:

(i)  $\{1, n\} \subset S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ .

(ii) orice element din  $S$  diferit de 1 este egal cu suma a două elemente (nu neapărat distincte) din  $S$ .

Demonstrați că:

a)  $f(n) \geq [\log_2 n] + 1$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ ;

b) există o mulțime infinită de valori ale lui  $n$  pentru care  $f(n) = f(n+1)$ .

*D. Mihel, Timișoara*

### Clasa a XI-a

1. a) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a + \sqrt{b}}}}}_{n \text{ radicali}}$ , unde  $a, b > 0$

sunt date.

b) Fie șirurile de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(x_n)_{n \geq 1}$ , astfel încât  $a_n > 0$  și

$$x_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{\dots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}}$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se demonstreze că:

(i) șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este mărginit dacă și numai dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit;

(ii) șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent dacă și numai dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

*V. Matroenco, București*

2. În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A_n(n, n^3)$  cu  $n \in \mathbb{N}^*$  și punctul  $B(0, 1)$ . Să se demonstreze că:

a) pentru orice numere naturale  $k > j > i \geq 1$ , punctele  $A_i, A_j, A_k$  sunt necoliniare;

b) pentru orice numere naturale  $i_k > i_{k-1} > \dots > i_1 \geq 1$ , avem:

$$\mu(\widehat{A_{i_1}OB}) + \mu(\widehat{A_{i_2}OB}) + \dots + \mu(\widehat{A_{i_k}OB}) < \frac{\pi}{2}.$$

\* \* \*

3. a) Să se găsească o matrice  $A \in M_3(\mathbb{C})$ , astfel încât  $A^2 \neq O_3$  și  $A^3 = O_3$ .

b) Fie  $n, p \in \{2, 3\}$ . Să se arate că dacă există o funcție bijectivă  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_p(\mathbb{C})$  cu proprietatea  $f(XY) = f(X)f(Y)$ , pentru orice  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ , atunci  $n = p$ .

*I.Savu, București*

4. Se consideră o funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisface condițiile:

(i)  $f$  are limite laterale în orice punct  $a \in \mathbb{R}$  și

$$f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0);$$

(ii) pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , avem  $f(a-0) < f(b-0)$ .

Să se demonstreze că  $f$  este strict crescătoare.

*M.Piticari, Câmpulung Moldovenesc și S.Rădulescu, București*

### Clasa a XII-a

1. Fie  $A$  un incl.  $a \in A$ ,  $n$  și  $k$  numere naturale,  $n \geq 2$ ,  $k \geq 2$ , astfel încât  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} = 0$  și  $a^k = a + 1$ . Să se arate că:

a) oricare ar fi  $s \in \mathbb{N}^*$ , există  $p_0, p_1, \dots, p_{k-1} \in \mathbb{N}$ , astfel ca

$$a^s = p_0 + p_1 a + \dots + p_{k-1} a^{k-1};$$

b) există  $m \in \mathbb{N}^*$ , astfel ca  $a^m = 1$ .

*M.Andronache, București*

2. a) Se consideră inelele  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  unde  $A_n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_{\text{de } n \text{ ori } \mathbb{Z}_2}$ ,

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că, pentru orice  $n \neq m$ , inelele  $A_n$  și  $A_m$  nu sunt izomorfe și că există un morfism de inele  $f : A_n \rightarrow A_m$ .

b) Să se arate că există inelele  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  astfel ca, pentru orice  $n \neq m$ , să nu existe morfisme de inele  $f : B_n \rightarrow B_m$ .

*B.Berceanu, București*

3. Pentru fiecare  $\alpha \in (0, 1]$  notăm

$$I_n(\alpha) = \int_0^\alpha \ln(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx, \quad n \geq 2.$$

Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha)$ , pentru  $\alpha \in (0, 1)$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(1)$ .

*M.Piticari, Câmpulung Moldovenesc*