

Avem  $\Delta = 4x^2 - 8(x^2 - x) = 8x - 4x^2 = 4x(2 - x) \geq 0$ , deoarece  $x \in [1, 2]$ . Rezultă că ecuația are rădăcini reale cu suma  $x \geq 0$  și produsul  $\frac{x(x-1)}{2} \geq 0$ , adică  $a_1, a_2 \geq 0$ .

Să considerăm cazul  $n \geq 2$  natural și fie  $x \in [1, n]$ . Există  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  astfel încât  $x \in [k, k+1]$ , deci  $x - k + 1 \in [1, 2]$ . Conform celor de mai sus, există  $a_1, a_2 \geq 0$  cu  $x - k + 1 = a_1 + a_2 = a_1^2 + a_2^2$ , deci  $x = a_1 + a_2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} + \underbrace{0 + \dots + 0}_{\text{de } n-k-1 \text{ ori}} = a_1^2 + a_2^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} + \underbrace{0^2 + \dots + 0^2}_{\text{de } n-k-1 \text{ ori}}$ . Alegând  $a_3 = a_1 = \dots = a_{k+1} = 1$  și  $a_{k+2} = \dots = a_n = 0$ , problema este rezolvată.

### Clasa a X-a

1. Pentru  $n = 1$ , relația din enunț devine  $4x_1x_1 = 2x_1x_2$ , de unde  $x_2 = 2$ .

Pentru  $n = 2$ , obținem  $4(x_1x_2 + 2x_2x_1) = 3(x_1x_2 + x_2x_3)$ , de unde  $4(2 + 4) = 3(2 + 2x_3)$ , de unde  $x_3 = 3$ .

Vom arăta prin inducție după  $n$ , că  $x_n = n$ . Presupunem că  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2, \dots, x_n = n$  și demonstrăm că  $x_{n+1} = n + 1$ . Conform ipotezei:

$$4 \sum_{k=1}^n kx_kx_{n-k+1} = (n+1) \sum_{k=1}^n x_kx_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sum_{k=1}^n k \cdot k \cdot (n-k+1) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + (n+1) \cdot nx_{n+1}. \quad (1)$$

$$\text{Avem } 4 \sum_{k=1}^n k^2(n-k+1) = 4(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^3 =$$

$$= 4(n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} = n(n+1)^2 \left( \frac{2}{3}(2n+1) - n \right) =$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{3}. \text{ Pe de altă parte, } (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k^2 +$$

$$+(n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k = (n+1) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n+1) \frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= (n-1)n(n+1) \left( \frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)n(n+1)^2}{3}.$$

Revenind la relația (1), rezultă:

$$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)^2}{3} + (n+1)nx_{n+1} \text{ sau}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)(n+1)}{3} = x_{n+1}, \text{ deci } x_{n+1} = n+1, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

2. Să observăm că numerele  $x, y, z$  sunt distincte (altfel  $0 = 3$ ). Împărțind (sau scăzând) primele două ecuații, obținem  $x(x-z) = y(z-y)$ , de unde  $x^2 + y^2 = z(x+y)$ . Analog se obțin relațiile  $y^2 + z^2 = x(y+z)$  și  $z^2 + x^2 = y(z+x)$ . Prin adunare, rezultă  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  și deci  $x^2 = yz, y^2 = zx, z^2 = xy$ . Atunci  $x^2 - y^2 = yz - zx$  sau  $x + y + z = 0$ .

Prima ecuație a sistemului se scrie succesiv  $x(x^2 - (y+z)x + yz) = 3 \Leftrightarrow x(x^2 - (-x)x + x^2) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 1$  și analog  $y^3 = z^3 = 1$ .

Notând cu  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ , rezultă că  $x, y, z \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$  și cum  $x + y + z = 0$ , deducem că soluțiile sunt cele șase permutări ale mulțimii  $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ .

3. Presupunem prin absurd că  $a \geq b$ ; rezultă că  $13^a \geq 13^b$  și  $5^a \geq 5^b$ . Din relația  $3^a + 13^b = 17^a$ , rezultă  $3^a + 13^a \geq 17^a$  sau  $\left(\frac{3}{17}\right)^a + \left(\frac{13}{17}\right)^a \geq 1$ . (1).

Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(\frac{3}{17}\right)^x + \left(\frac{13}{17}\right)^x$ . Funcția  $f$  este strict descrescătoare și  $f(1) = \frac{16}{17} < 1$ . Conform relației (1) avem  $f(1) < f(a)$  și din monotonie, obținem  $a < 1$ . (2). Relația  $5^a + 7^b = 11^b$  atrage  $5^b + 7^b \leq 11^b$  sau  $\left(\frac{5}{11}\right)^b + \left(\frac{7}{11}\right)^b \leq 1$ . (3). Funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{7}{11}\right)^x$  este strict descrescătoare și  $g(1) = \frac{12}{11} > 1$ . Din relația (3) avem  $g(1) > g(b)$ , iar din monotonia funcției  $g$ , rezultă  $b > 1$ . (4).

Relațiile (2) și (4) dau  $a < b$ , în contradicție cu presupunerea făcută. În consecință,  $a < b$ .

4. a) Fie  $n \geq 2$  un număr natural și  $S$  o mulțime cu  $f(n)$  elemente și având proprietățile din enunț. Vom nota cu  $a_1 < a_2 < \dots < a_{f(n)}$  elementele mulțimii  $S$ ; atunci  $a_1 = 1$  și  $a_{f(n)} = n$ . Să observăm că  $a_2$  aparține lui  $S$ , deci este suma a două elemente ale mulțimii  $S$ , evident mai mici ca  $a_2$ . Atunci  $a_2 = a_1 + a_1 = 1 + 1 = 2$ . În continuare,  $a_3 \in S$ , deci  $a_3 = a_1 + a_2 = 3$ , sau  $a_3 = a_2 + a_2 = 4$ . Oricum  $a_3 \leq 2^2$ . Suntem conduși către ipoteza că  $a_k \leq 2^{k-1}$ , oricare ar fi  $k = 1, f(n)$ . Vom demonstra acest fapt prin inducție. Verificarea fiind făcută, vom arăta că dacă  $a_k \leq 2^{k-1}$ , atunci  $a_{k+1} \leq 2^k$ . Deoarece  $a_{k+1}$  este suma a două numere din  $S$  mai mici decât el, avem  $a_{k+1} \leq a_k + a_k = 2a_k \leq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ , ceea ce trebuia demonstrat.

Prin urmare,  $n = a_{f(n)} \leq 2^{f(n)-1}$ , adică  $f(n) \geq 1 + \log_2 n \geq 1 + [\log_2 n]$ .

b) Observăm că egalitatea apare doar dacă  $n = 2^p$ ,  $p \geq 1$ , atunci  $f(2^p) = p + 1$  și  $S = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^p\}$ .

Pentru  $n = 2^p + 1$ , conform lui a), avem  $f(2^p + 1) \geq p + 2$ . Mulțimea

$\{1, 2, 2^2, \dots, 2^p, 2^p + 1\}$  satisface condițiile din enunț și are  $p + 2$  elemente; atunci  $f(2^p + 1) = p + 2$ .

Pentru  $n = 2^p + 2$ , avem analog  $f(2^p + 2) \geq p + 2$ . Mulțimea  $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^p, 2^p + 2\}$  satisface ipotezele și are  $p + 2$  elemente, deci  $f(2^p + 2) = p + 2$ .

În concluzie,  $f(2^p + 1) = f(2^p + 2)$  pentru o infinitate de valori ale lui  $p$ .

### Clasa a XI-a

1. a) Fie  $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a + \sqrt{b}}}}$  și  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{a + x}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este dat de relația de recurență:  $x_1 = \sqrt{b}$  și  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Funcția  $f$  are un unic punct fix în  $[0, \infty)$ ,  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ . Distingem cazurile:

i)  $\sqrt{b} \leq \alpha$ . Atunci  $x_2 - x_1 = f(x_1) - x_1 = \sqrt{a + x_1} - x_1 = \frac{a + x_1 - x_1^2}{\sqrt{a + x_1} + x_1} = \frac{(\alpha - x_1)(x_1 - \beta)}{\sqrt{a + x_1} + x_1} \geq 0$ , unde  $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ .

Cum  $x_2 \geq x_1$  și  $f$  este crescătoare, rezultă  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , deci  $x_3 \geq x_2$ . Obținem, prin inducție, că  $x_{n+1} \geq x_n$ ,  $\forall n \geq 1$ , deci  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător.

Cum  $x_1 \leq \alpha$ , rezultă  $f(x_1) \leq f(\alpha)$ , deci  $x_2 \leq \alpha$ . Obținem, prin inducție, că  $x_n \leq \alpha$ ,  $\forall n \geq 1$ , deci  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

ii)  $\sqrt{b} > \alpha$ . Atunci  $x_2 < x_1$  și, prin inducție, obținem că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător. Cum  $(x_n)_{n \geq 1}$  este mărginit inferior, rezultă că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

Fie  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Cum  $x_{n+1} = f(x_n)$  și  $f$  este continuă, rezultă că  $f(l) = l$ , deci  $l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ .

b) (i) Relația din enunț este echivalentă cu  $x_1 = \sqrt{a_1}$  și  $x_{n+1}^2 = a_{n+1} + x_n$ ,  $n \geq 1$ . Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este mărginit, considerăm  $M > 0$ , astfel încât  $x_n \leq M$ ,  $\forall n \geq 1$ . Obținem  $0 < a_n < a_n + x_{n-1} = x_n^2 \leq M^2$ ,  $\forall n \geq 2$ , deci  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

Dacă  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit și  $a_n \leq p$ ,  $\forall n \geq 1$ , atunci  $0 < x_n \leq \sqrt{p + \sqrt{p + \dots + \sqrt{p}}} = y_n$ . Cum  $(y_n)_{n \geq 1}$  este convergent, deci mărginit superior, rezultă că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

(ii) Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent, atunci din relația  $a_n = x_n^2 - x_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , rezultă că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

Reciproc, fie  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Distingem cazurile:

u)  $L > 0$ . Fie  $0 < \varepsilon < \sqrt{L}$  și  $L_1 = L - \varepsilon^2$ ,  $L_2 = L + \varepsilon^2$ . Cum  $a_n \rightarrow L$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $L_1 < a_n < L_2$ ,  $\forall n \geq n_\varepsilon$ .