

ortocentrele triunghiurilor MAB , MBC , MCD , respectiv MDA , iar E , F mijloacele segmentelor (AB) , respectiv (CD) . Demonstrați că:

- a) $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram;
- b) $H_1H_3 = 2 \cdot EF$.

N. Mușuroia, Baia Mare

3. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Notăm G_1 , G_2 , G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP , BMN , CNP . Demonstrați că:

- a) triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate;
- b) pentru orice punct D al planului triunghiului ABC ,

$$3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC.$$

D. Marinescu, Hunedoara și V. Cornea, Hunedoara

4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstrați că:

- a) dacă $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt numere reale, astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

atunci: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$;

- b) dacă $x \in [1, n]$ este un număr real, atunci există numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, astfel încât:

$$x = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

R. Ilie, Brașov

Clasa a X-a

1. Determinați șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ pentru care $x_1 = 1$ și

$$\begin{aligned} 4(x_1x_n + 2x_2x_{n-1} + 3x_3x_{n-2} + \dots + nx_nx_1) = \\ = (n+1)(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1}) \end{aligned}$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

N. Papacu, Slobozia

2. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul:

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3 \\ y(y-x)(y-z) = 3 \\ z(z-x)(z-y) = 3. \end{cases}$$

M. Piticari, Câmpulung Moldovenesc

3. Fie a și b două numere reale care satisfac relațiile $3^a + 13^b = 17^a$ și $5^a + 7^b = 11^b$. Demonstrați că $a < b$.

C. Mortici, Târgoviște

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, notăm cu $f(n)$ numărul minim de elemente ale unei mulțimi S care îndeplinește simultan condițiile:

(i) $\{1, n\} \subset S \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) orice element din S diferit de 1 este egal cu suma a două elemente (nu neapărat distincte) din S .

Demonstrați că:

a) $f(n) \geq [\log_2 n] + 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x ;

b) există o mulțime infinită de valori ale lui n pentru care $f(n) = f(n+1)$.

D. Mihoc, Timișoara

Clasa a XI-a

1. a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a + \sqrt{b}}}}}_{n \text{ radicali}}$, unde $a, b > 0$

sunt date.

b) Fie șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(x_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_n > 0$ și

$$x_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{\dots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}}}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că:

(i) șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit dacă și numai dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit;

(ii) șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

V. Matroenco, București

2. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^3)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ și punctul $B(0, 1)$. Să se demonstreze că:

a) pentru orice numere naturale $k > j > i \geq 1$, punctele A_i, A_j, A_k sunt necoliniare;

b) pentru orice numere naturale $i_k > i_{k-1} > \dots > i_1 \geq 1$, avem:

$$\mu(\widehat{A_{i_1}OB}) + \mu(\widehat{A_{i_2}OB}) + \dots + \mu(\widehat{A_{i_k}OB}) < \frac{\pi}{2}.$$

* * *