

egalitatea obținându-se atunci când K , L , M sunt mijloacele muchiilor AB , CC' , $D'A'$.

Pentru aceasta, considerăm rețeaua de cuburi din figura alăturată. Punctele M_1 , M_2 sunt considerate astfel încât:

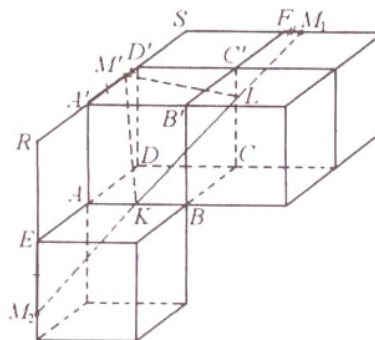
$$\begin{aligned} EM_2 &= A'M = x \text{ și} \\ FM_1 &= MD' = a - x. \end{aligned}$$

Se observă că:

$$MK = KM_2 \text{ și } ML = LM_1, \text{ deci:}$$

$$KL + LM + MK = M_2K + KL + LM_1 \geq M_1M_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Pe de altă parte, } M_1M_2^2 &= M_2R^2 + RS^2 + SM_1^2 = (a+x)^2 + (3a)^2 + \\ &+ (2a-x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 + 9a^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + 14a^2 = \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}a^2 \right] \geq \frac{27}{2}a^2, \text{ adică } M_1M_2 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}a, \text{ cu egalitate pentru} \\ &x = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$



Clasa a IX-a

1. Notând $\frac{x+1}{6} = y$, relația devine:

$$\left[y + \frac{1}{3}\right] - \left[y + \frac{1}{2}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right] = [3y] - [2y], \text{ ceea ce se deduce din}$$

identitățile lui *Hermite*: $[2y] = [y] + \left[y + \frac{1}{2}\right]$ și $[3y] = [y] + \left[y + \frac{1}{3}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right]$.

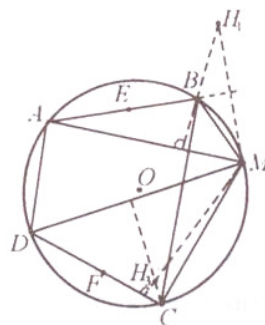
Observație. Se pot studia cazurile: $x \in [6k, 6k+1)$, $x \in [6k+1, 6k+2)$ etc., unde $k \in \mathbb{Z}$. De exemplu, dacă $x \in [6k, 6k+1)$, relația devine $k - k + k = 3k - 2k$, ceea ce este evident.

2. a) Folosind relația lui *Sylvester* în triunghiurile MAB , MBC , MCD , MDA înscrise în cercul de centru O avem:

$$\begin{aligned} \vec{OH}_1 &= \vec{OM} + \vec{OA} + \vec{OB}, \\ \vec{OH}_2 &= \vec{OM} + \vec{OB} + \vec{OC}, \\ \vec{OH}_3 &= \vec{OM} + \vec{OC} + \vec{OD}, \\ \vec{OH}_4 &= \vec{OM} + \vec{OD} + \vec{OA}. \end{aligned} \text{ Avem:}$$

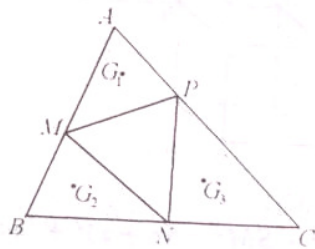
$$\begin{aligned} \vec{H_1H_2} &= \vec{OH_2} - \vec{OH_1} = \\ &= (\vec{OM} + \vec{OB} + \vec{OC}) - (\vec{OM} + \vec{OA} + \vec{OB}) = \\ &= \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OH_3} - \vec{OH_4} = \vec{H_4H_3}, \end{aligned}$$

de unde $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.



b) Avem $\overrightarrow{H_1 H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}) + 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}) = 2\overrightarrow{EF}$, de unde $H_1 H_3 = 2EF$.

3. Fie $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$.



Pentru un punct oarecare D avem:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{DB};$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{DB} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{DC} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{DA}$$

și, prin însumare:

$$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}.$$

a) Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$. Luând $D = G$ în relația precedentă, rezultă $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ (deci $\triangle MNP$ are același centru de greutate G).

În plus, au loc relațiile:

(1) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{GG_1}$ (în $\triangle AMP$),

(2) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{GG_2}$ (în $\triangle BMN$) și

(3) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GN} = 3\overrightarrow{GG_3}$ (în $\triangle CNP$). Adunând aceste relații,

obținem: $\vec{0} = 3(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3})$, adică $\triangle G_1 G_2 G_3$ are centrul de greutate G , ca și $\triangle ABC$.

b) Avem $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DG_1} + \overrightarrow{DG_2} + \overrightarrow{DG_3}$ și, conform inegalității modulului, rezultă $3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3$. (Inegalitatea este strictă, vectorii $\overrightarrow{DG_1}$, $\overrightarrow{DG_2}$, $\overrightarrow{DG_3}$ nefiind coliniari.)

Pentru a doua inegalitate avem: $3\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DM}$, de unde $3DG_1 < DA + DP + DM$ și apoi, analog, $3DG_2 < DB + DM + DN$, $3DG_3 < DC + DN + DP$. Prin adunare, rezultă: $DG_1 + DG_2 + DG_3 < \frac{1}{3}(DA + DB + DC + 2(DM + DN + DP))$.

Este suficient să arătăm că $DM + DN + DP \leq DA + DB + DC$. (4)

Cum $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{DB}$, rezultă $DM \leq \frac{1}{\lambda+1} DA + \frac{\lambda}{\lambda+1} DB$ și analoge. Prin însumare, acestea dau (4), ceea ce trebuia demonstrat.

4. a) Folosind inegalitatea $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, rezultă $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$.

b) Fie $n = 2$ și $x \in [1, 2]$. Vom determina $a_1, a_2 \geq 0$, astfel încât $x = a_1 + a_2 = a_1^2 + a_2^2$. Avem $x = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2$, de unde $a_1 a_2 = \frac{x^2 - x}{2}$.

Formăm ecuația de gradul al doilea (în t) cu rădăcinile a_1 și a_2 :

$$t^2 - (a_1 + a_2)t + a_1 a_2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2xt + x^2 - x = 0.$$

Avem $\Delta = 4x^2 - 8(x^2 - x) = 8x - 4x^2 = 4x(2 - x) \geq 0$, deoarece $x \in [1, 2]$.
 Rezultă că ecuația are rădăcini reale cu suma $x \geq 0$ și produsul $\frac{x(x-1)}{2} \geq 0$,
 adică $a_1, a_2 \geq 0$.

Să considerăm cazul $n \geq 2$ natural și fie $x \in [1, n]$. Există
 $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ astfel încât $x \in [k, k+1]$, deci $x - k + 1 \in [1, 2]$. Conform
 celor de mai sus, există $a_1, a_2 \geq 0$ cu $x - k + 1 = a_1 + a_2 = a_1^2 + a_2^2$, deci $x = a_1 +$
 $+ a_2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} + \underbrace{0 + \dots + 0}_{\text{de } n-k-1 \text{ ori}} = a_1^2 + a_2^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} + \underbrace{0^2 + \dots + 0^2}_{\text{de } n-k-1 \text{ ori}}$.
 Alegând $a_3 = a_1 = \dots = a_{k+1} = 1$ și $a_{k+2} = \dots = a_n = 0$, problema este
 rezolvată.

Clasa a X-a

1. Pentru $n = 1$, relația din enunț devine $4x_1x_1 = 2x_1x_2$, de unde
 $x_2 = 2$.

Pentru $n = 2$, obținem $4(x_1x_2 + 2x_2x_1) = 3(x_1x_2 + x_2x_3)$, de unde
 $4(2 + 4) = 3(2 + 2x_3)$, de unde $x_3 = 3$.

Vom arăta prin inducție după n , că $x_n = n$. Presupunem că $x_1 = 1$,
 $x_2 = 2, \dots, x_n = n$ și demonstrăm că $x_{n+1} = n + 1$. Conform ipotezei:

$$4 \sum_{k=1}^n kx_kx_{n-k+1} = (n+1) \sum_{k=1}^n x_kx_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sum_{k=1}^n k \cdot k \cdot (n-k+1) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + (n+1) \cdot nx_{n+1}. \quad (1)$$

$$\text{Avem } 4 \sum_{k=1}^n k^2(n-k+1) = 4(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^3 =$$

$$= 4(n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} = n(n+1)^2 \left(\frac{2}{3}(2n+1) - n \right) =$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{3}. \text{ Pe de altă parte, } (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k^2 +$$

$$+(n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k = (n+1) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n+1) \frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= (n-1)n(n+1) \left(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)n(n+1)^2}{3}.$$

Revenind la relația (1), rezultă:

$$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)^2}{3} + (n+1)nx_{n+1} \text{ sau}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)(n+1)}{3} = x_{n+1}, \text{ deci } x_{n+1} = n+1, \text{ ceea ce trebuia}$$

demonstrat.