Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale pozitive x, y, z, astfel încât $xyz(x+y+z)=1$.

a) Arătaţi că:

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

b) Determinaţi un triplet (x,y,z) cu proprietatea din ipoteză.

* * *

2. a) Fie x un număr real astfel încât x^2+x şi x^3+2x să fie raţionale. Arătaţi că x este număr raţional.

b) Arătaţi că există numere iraţionale x astfel încât x^2+x şi x^3-2x să fie raţionale.

Florica Banu, Bucureşti

3. Se consideră piramida regulată $VABCD$ cu vârful în V, în care măsura unghiului format de două muchii laterale opuse este de 45^0. Punctele M, N şi P sunt respectiv: proiecţia punctului A pe dreapta VC, simetricul punctului M în raport cu planul (VBD) şi simetricul punctului N în raport cu centrul O. (O este centrul bazei piramidei.)

a) Arătaţi că poliedrul $MDNBP$ este piramidă regulată.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreapta ND şi planul (ABC).

M. Fianu, Bucureşti

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a. Se consideră punctele $K\in[AB]$, $L\in[CC']$, $M\in[D'A']$.

a) Arătaţi că $\sqrt{3}\cdot KL\geq KB+BC+CL$.

b) Arătaţi că perimetrul triunghiului KLM este mai mare strict decât $2a\sqrt{3}$.

D.Brânzei, Iaşi şi *R.Gologan*, Bucureşti

Clasa a IX-a

1. Demonstraţi că pentru orice număr real x are loc relaţia:

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right],$$

unde $[a]$ desemnează partea întreagă a numărului real a.

C.Mortici, Târgovişte

2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi M un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile patrulaterului. Fie H_1, H_2, H_3, H_4, ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, MCD, respectiv MDA, iar E, F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (CD). Demonstraţi că:

a) $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram;

b) $H_1H_3 = 2 \cdot EF$.

N.Muşuroia, Baia Mare

3. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Notăm G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, CNP. Demonstraţi că:

a) triunghiurile ABC şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate;

b) pentru orice punct D al planului triunghiului ABC,

$$3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC.$$

D.Marinescu, Hunedoara şi *V.Cornea*, Hunedoara

4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstraţi că:

a) dacă $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sunt numere reale, astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

atunci: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq n$;

b) dacă $x \in [1, n]$ este un număr real, atunci există numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, astfel încât:

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

R.Ilie, Braşov

Clasa a X-a

1. Determinaţi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care $x_1 = 1$ şi

$$4(x_1x_n + 2x_2x_{n-1} + 3x_3x_{n-2} + \ldots + nx_nx_1) =$$
$$= (n+1)(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1})$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

N.Papacu, Slobozia

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe sistemul:

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3 \\ y(y-x)(y-z) = 3 \\ z(z-x)(z-y) = 3. \end{cases}$$

M.Piticari, Câmpulung Moldovenesc