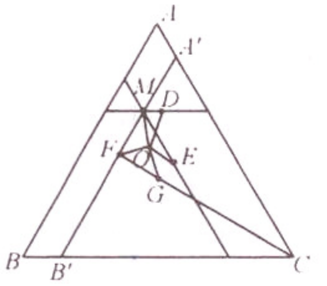
Cum $CG \perp AB$ şi $A'B' \| AB$, rezultă că $CG \perp A'B'$. Din faptul că $\triangle CA'B'$ este echilateral, iar F este mijlocul lui $[A'B']$, rezultă că $CF \perp A'B'$, deci $G \in FC$.



Rezultă că $\triangle MFG$ este dreptunghic în F, deci

$$OF = \frac{MG}{2}.$$

Analog,

$$OD = OE = \frac{MG}{2}, \text{ deci } OD = OE = OF.$$

b) Presupunem că E este în interiorul lui $\widehat{FMD}$ şi G în interiorul lui $\widehat{FME}$, pentru orice altă configuraţie raţionându-se analog.

Atunci $m(\widehat{FOD}) = m(\widehat{FOM}) + m(\widehat{DOM}) = 360^0 - 2m(\widehat{OMF}) - 2m(\widehat{OMD}) = 360^0 - 2m(\widehat{FMD}) = 360^0 - 240^0 = 120^0$.

Cum $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{FOG}) + m(\widehat{GOE}) = 2m(\widehat{OMF}) + 2m(\widehat{OME}) = 2m(\widehat{FME}) = 120^0$, rezultă că $m(\widehat{DOE}) = 120^0$, deci triunghiurile FOD, FOE şi DOE sunt congruente. Rezultă că $FD = DE = EF$, deci triunghiul FDE este echilateral.

4. Fie $\{M\} = AF \cap BC$, d perpendiculara în A pe AF şi $\{N\} = d \cap BC$. Cum $m(\widehat{AME}) = m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{MAE})$, rezultă că triunghiul MAE este isoscel cu vârful în E, deci $ME = AE$. Cum triunghiul MAN este dreptunghic în A, rezultă că triunghiul AEN este isoscel cu vârful în E, deci $AE = EN$. Cum $B \in (EN)$, rezultă că $DF + EB = AE = EB + BN$, deci $DF = BN$.

Cum $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{DAF})$, rezultă că triunghiurile dreptunghice DAF şi BAN sunt congruente, deci $AB = AD$. În consecinţă, $ABCD$ este pătrat.

Clasa a VIII-a

1. a) Folosind condiţia $xyz(x+y+z) = 1$, rezultă:

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} =$$

$$= \frac{x(xy + zx + zy + z^2)}{y} = \frac{x(y(x+z) + z(x+z))}{y} = \frac{x(y+z)(x+z)}{y},$$ precum şi relaţiile analoage:

$$y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(z+x)(y+x)}{z};\ z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(x+y)(z+y)}{x}.$$

Prin înmulţire, $\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$, de unde rezultă cerinţa.

b) Să considerăm în relația dată $x = y = z$. Atunci $x^3 \cdot 3x = 1$ sau $x^4 = \frac{1}{3}$. Obținem: $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ sau $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)$.

2. a) Notăm $x^2 + x = a$, $x^3 + 2x = b$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$. Avem:
$b = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 2x = x(x^2 + x) - (x^2 + x) + x + 2x = x \cdot a - a + 3x = x(a + 3) - a$, deci:

$$x(a + 3) = a + b. \qquad (1)$$

Vom arăta că $a \neq -3$. Într-adevăr, dacă $a = -3$, atunci $x^2 + x + 3 = 0$ sau $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$, fals. Prin urmare $a + 3 \neq 0$ și, din relația (1), deducem că $x = \frac{a + b}{a + 3} \in \mathbb{Q}$.

b) Notăm $x^2 + x = a$, $x^3 - 2x = c$, cu $a, c \in \mathbb{Q}$. Avem $c = x^3 + x^2 - x^2 - 2x = ax - (x^2 + x) - x = ax - a - x = x(a - 1) - a$, deci:

$$x(a - 1) = a + c. \qquad (2)$$

Dacă a ar fi diferit de 1, atunci, din relația 2, obținem $x = \frac{a + c}{a - 1}$ și deci x ar fi rațional. În consecință, alegem $a = 1$, adică $x^2 + x = 1$ sau $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Pentru $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sau $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ se calculează $a = x^2 + x = 1 \in \mathbb{Q}$ și $c = x^3 - 2x \overset{(2)}{=} -a = -1 \in \mathbb{Q}$, ceea ce trebuia obținut.

3. Deoarece simetricul segmentului CV față de planul (VBD) este segmentul AV, deducem că $N \in AV$ și $VN = VM$. În plus, $OM = ON$.

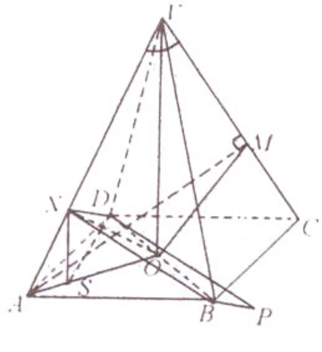
În triunghiul dreptunghic AMC, MO este mediană, de unde $MO = AO = OC$ și apoi

$$NO = OB. \ (1)$$

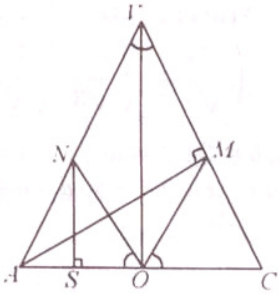
Triunghiul OMC este isoscel, deci $\triangle MOC \sim \triangle AVC \Rightarrow m(\widehat{MOC}) = m(\widehat{AVC}) = 45^0$, conform ipotezei.

Deducem că $m(\widehat{NOA}) = 45^0$ și $m(\widehat{NOM}) = 90^0$, adică

$$MO \perp NO. \ (2)$$



Conform ipotezei segmentul NP are mijlocul O ca și BD; rezultă că $NBPD$ este paralelogram.



Cum $BD\perp(VAC)$, rezultă $BD\perp NO$ şi, utilizând (1), obţinem că $NBPD$ este pătrat. Mai mult, $BD\perp MO$ şi din (2), rezultă că $MO\perp(NBPD)$, adică $MDNBP$ este piramidă regulată.

b) Fie S proiecţia punctului N pe planul bazei $(ABCD)$; $S \in AO$. Deoarece $m(\widehat{NOA}) = 45^0$, rezultă că ΔNSO este dreptunghic isoscel, de unde $NS = \dfrac{NO}{\sqrt{2}}$.

Pe de altă parte, $NO = OD$ şi $NO\perp OD$, deci $ND = NO\sqrt{2}$. Atunci $\sin\widehat{NDS} = \dfrac{NS}{ND} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}NO}{NO\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, deci $m(\widehat{NDS}) = 30^0$.

Deoarece unghiul format de dreapta ND şi planul (ABC) este $\widehat{NDS}$, problema este rezolvată.

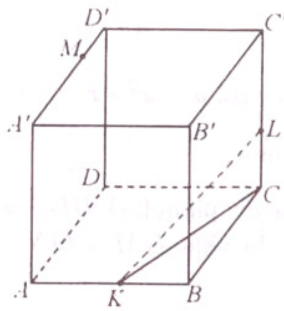
4. a) Avem $KL^2 = LC^2+CK^2 = LC^2+CB^2+BK^2$, conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiurile KCL şi KBC.

Folosind inegalitatea: $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow 3KL^2 = 3(KB^2+BC^2+CL^2) \geq$

$$\geq (KB+BC+CL)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cdot KL \geq KB+BC+CL, \ (1)$$

ceea ce trebuia demonstrat.



b) Se obţin analog inegalităţile:

(2) $\sqrt{3}\cdot ML \geq LC' + C'D' + D'M$ şi

(3) $\sqrt{3}\cdot MK \geq MA' + A'A + AK$.

Prin însumare, obţinem:

$$\sqrt{3}(KL+LM+MK) \geq (KB+AK)+(CL+LC')+(D'M+MA')+$$
$$+BC+C'D'+A'A = 6a, \text{ de unde } KL+LM+MK \geq \frac{6a}{\sqrt{3}} = 2a\sqrt{3}.$$

Vom demonstra că inegalitatea este strictă.

Într-adevă, egalitatea survine doar în cazul în care (1), (2) şi (3) devin simultan egalităţi. Pe de altă parte, avem $3(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$, deci (1) devine egalitate pentru $KB = BC = CL \Rightarrow K = A$ şi $L = C'$. Atunci inegalitatea (2) devine strictă, de unde $KL+LM+MK > 2a\sqrt{3}$.

Observaţie. Se poate demonstra că $KL+LM+MK \geq \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a$, egalitatea obţinându-se atunci când K, L, M sunt mijloacele muchiilor AB, CC', $D'A'$.

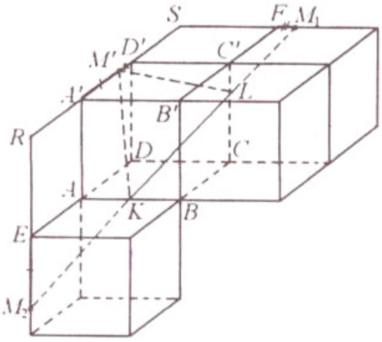
Pentru aceasta, considerăm reţeaua de cuburi din figura alăturată. Punctele M_1, M_2 sunt considerate astfel încât:

$EM_2 = A'M = x$ şi

$FM_1 = MD' = a - x$.

Se observă că:

$MK = KM_2$ şi $ML = LM_1$, deci:



$KL + LM + MK = M_2K + KL + LM_1 \geq M_1M_2$.

Pe de altă parte, $M_1M_2^2 = M_2R^2 + RS^2 + SM_1^2 = (a + x)^2 + (3a)^2 + (2a - x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 + 9a^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + 14a^2 = 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}a^2\right] \geq \frac{27}{2}a^2$, adică $M_1M_2 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}a$, cu egalitate pentru $x = \frac{a}{2}$.

Clasa a IX-a

1. Notând $\frac{x+1}{6} = y$, relaţia devine:

$$\left[y + \frac{1}{3}\right] - \left[y + \frac{1}{2}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right] = [3y] - [2y],$$ ceea ce se deduce din identităţile lui *Hermite*: $[2y] = [y] + \left[y + \frac{1}{2}\right]$ şi $[3y] = [y] + \left[y + \frac{1}{3}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right]$.

Observaţie. Se pot studia cazurile: $x \in [6k, 6k+1)$, $x \in [6k + 1, 6k + 2)$ etc., unde $k \in \mathbb{Z}$. De exemplu, dacă $x \in [6k, 6k + 1)$, relaţia devine $k - k + k = 3k - 2k$, ceea ce este evident.

2. a) Folosind relaţia lui *Sylvester* în triunghiurile MAB, MBC, MCD, MDA înscrise în cercul de centru O avem:

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$,

$\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$. Avem:

$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{H_4H_3}$,

de unde $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.