Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale pozitive x, y, z, astfel încât $xyz(x+y+z)=1$.
a) Arătaţi că:

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

b) Determinaţi un triplet (x, y, z) cu proprietatea din ipoteză.

* * *

2. a) Fie x un număr real astfel încât x^2+x şi x^3+2x să fie raţionale. Arătaţi că x este număr raţional.

b) Arătaţi că există numere iraţionale x astfel încât x^2+x şi x^3-2x să fie raţionale.

Florica Banu, Bucureşti

3. Se consideră piramida regulată $VABCD$ cu vârful în V, în care măsura unghiului format de două muchii laterale opuse este de 45^0. Punctele M, N şi P sunt respectiv: proiecţia punctului A pe dreapta VC, simetricul punctului M în raport cu planul (VBD) şi simetricul punctului N în raport cu centrul O. (O este centrul bazei piramidei.)

a) Arătaţi că poliedrul $MDNBP$ este piramidă regulată.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreapta ND şi planul (ABC).

M. Fianu, Bucureşti

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a. Se consideră punctele $K \in [AB]$, $L \in [CC']$, $M \in [D'A']$.

a) Arătaţi că $\sqrt{3}\cdot KL \geq KB+BC+CL$.

b) Arătaţi că perimetrul triunghiului KLM este mai mare strict decât $2a\sqrt{3}$.

D.Brânzei, Iaşi şi *R.Gologan*, Bucureşti

Clasa a IX-a

1. Demonstraţi că pentru orice număr real x are loc relaţia:

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right],$$

unde $[a]$ desemnează partea întreagă a numărului real a.

C.Mortici, Târgovişte

2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi M un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile patrulaterului. Fie H_1, H_2, H_3, H_4,