

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și periodică de perioadă 1. Să se arate că:

$$a) \int_a^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) f(nx) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

C. Mortici, Târgoviște

Soluții

Clasa a VII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât x , y , z sunt direct proporționale cu $n-1$, n și $n+1$. Atunci, $\frac{x}{n-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{n+1} = \frac{x+y+z}{3n} = \frac{60}{n}$. De aici rezultă $y = 60$, $x = 60 \cdot \frac{n-1}{n}$ și $z = 60 \cdot \frac{n+1}{n}$. Cum $(n, n+1) = 1$, rezultă $n \mid 60$, deci $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Cum pentru fiecare valoare posibilă a lui n obținem o scriere a lui 180 sub forma $x + y + z$, iar aceste scrieri sunt distincte, rezultă că numărul căutat este 11.

2. a) Notăm cu d_i modulul diferenței dintre punctajele a doi elevi la întrebarea i . Atunci $d_i = 0$, dacă ambii au răspuns corect sau ambii au răspuns greșit și $d_i = 2i$, dacă unul a răspuns corect și celălalt a răspuns greșit.

Rezultă că modulul diferenței a două punctaje totale distincte este cel puțin 2. Minimul căutat este 2 și el se realizează atunci când, de exemplu, un elev a răspuns corect la toate întrebările, iar altul a greșit răspunsul numai la prima întrebare.

b) Punctajul maxim este $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, iar punctajul minim este -21 . Cum diferența dintre două punctaje este un număr par, rezultă că toate punctajele sunt numere impare și aparțin mulțimii $\{-21, -19, -17, \dots, 17, 19, 21\}$, deci există cel mult 22 de posibilități de punctaje. Cum sunt 67 de elevi, atunci cel puțin 4 au același punctaj, deoarece în caz contrar, ar fi cel mult 66 de elevi.

c) Cum un punctaj este de forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$, pentru o anumită alegere a semnelor $+$ și $-$, rezultă că sunt $2^6 = 64$ posibilități de răspuns. Cum sunt 67 de elevi, rezultă că cel puțin doi elevi au dat răspunsuri identice.

3. a) Fie D , E și F mijloacele segmentelor paralele cu BC , AC și respectiv AB (vezi figura, pag. 64).

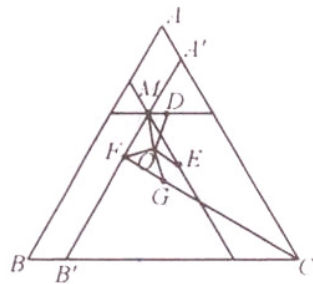
Cum $CG \perp AB$ și $A'B' \parallel AB$, rezultă că $CG \perp A'B'$. Din faptul că $\triangle CA'B'$ este echilateral, iar F este mijlocul lui $[A'B']$, rezultă că $CF \perp A'B'$, deci $G \in FC$.

Rezultă că $\triangle MFG$ este dreptunghic în F , deci

$$OF = \frac{MG}{2}.$$

Analog,

$$OD = OE = \frac{MG}{2}, \text{ deci } OD = OE = OF.$$



b) Presupunem că E este în interiorul lui \widehat{FMD} și G în interiorul lui \widehat{FME} , pentru orice altă configurație raționându-se analog.

Atunci $m(\widehat{FOD}) = m(\widehat{FOM}) + m(\widehat{DOM}) = 360^\circ - 2m(\widehat{OMF}) - 2m(\widehat{OMD}) = 360^\circ - 2m(\widehat{FMD}) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Cum $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{FOG}) + m(\widehat{GOE}) = 2m(\widehat{OMF}) + 2m(\widehat{OME}) = 2m(\widehat{FME}) = 120^\circ$, rezultă că $m(\widehat{DOE}) = 120^\circ$, deci triunghiurile FOD , FOE și DOE sunt congruente. Rezultă că $FD = DE = EF$, deci triunghiul FDE este echilateral.

4. Fie $\{M\} = AF \cap BC$, d perpendiculara în A pe AF și $\{N\} = d \cap BC$. Cum $m(\widehat{AME}) = m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{MAE})$, rezultă că triunghiul MAE este isoscel cu vârful în E , deci $ME = AE$. Cum triunghiul MAN este dreptunghic în A , rezultă că triunghiul AEN este isoscel cu vârful în E , deci $AE = EN$. Cum $B \in (EN)$, rezultă că $DF + EB = AE = EB + BN$, deci $DF = BN$.

Cum $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{DAF})$, rezultă că triunghiurile dreptunghice DAF și BAN sunt congruente, deci $AB = AD$. În consecință, $ABCD$ este pătrat.

Clasa a VIII-a

1. a) Folosind condiția $xyz(x+y+z) = 1$, rezultă:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{y^2} &= x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} = \\ &= \frac{x(xy + zx + zy + z^2)}{y} = \frac{x(y(x+z) + z(x+z))}{y} = \frac{x(y+z)(x+z)}{y}, \end{aligned}$$

cum și relațiile analoge:

$$y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(z+x)(y+x)}{z}; \quad z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(x+y)(z+y)}{x}.$$

Prin înmulțire, $\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right) \left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$, de unde rezultă cerința.