Cazul $x_0 = 1$

Cazul $x_0 \in (0, 1)$

III. a) Arătaţi că orice matrice $A \in M_4(\mathbf{C})$ se poate scrie ca suma a 4 matrice $B_i \in M_4(\mathbf{C})$, $i = \overline{1,4}$ de rang 1.

b) Arătaţi că I_4 nu se poate scrie ca suma a mai puţin de 4 matrice de rang 1.

Manuela Prajea, Ioan Savu

Soluţie:

a) Dacă A nu are coloane nule, A se poate scrie, de exemplu, ca sumă de matrice cu câte o singură coloană nenulă. Cazul în care A are coloane nulă şi cel puţin una nenulă. Pentru $A = 0$ se ia $B_1 = B_2 = B_3$ cu $b_{11} = 1$ şi $b_{ij} = 0$ iar B_4 cu -3 pe poziţia $(1,1)$ şi 0 în rest.

b) Se arată, de exemplu, că pentru $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, rang $A = k$, rang $B = 1$ avem rang $(A + B) \leq k + 1$

IV. Fie $\alpha > 1$ şi $f : \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right] \to \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right]$, bijectivă. Dacă $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right]$, arătaţi că:

a) f are cel puţin un punct de discontinuitate;

b) dacă f este continuă în 1, atunci f are o infinitate de puncte de discontinuitate;

c) există o funcţie f care verifică condiţiile din enunţ şi are un număr finit de puncte de discontinuitate.

Radu Mortici

Soluţie:

a) f continuă atrage f strict monotonă, deci f^{-1} şi f au monotonii diferite, absurd.

b) $f(1) = 1$. Dacă f continuă în 1 cu un număr finit de discontinuităţi există $a < 1 < b$ astfel ca $f|_{(a,b)}$ continuă şi se aplică a).

c) Corespondenţa e de tipul (aici $\alpha = 3$):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

şi $f : (2, 3) \to (1/2, 1)$ prin $f(x) = \frac{x-1}{2}$. Condiţia $f^{-1} = \frac{1}{f}$ defineşte unic f pe fiecare dintre intervalele $(1/2, 1)$, $(1/3, 1/2)$, $(1, 2)$.

CLASA A XII-A

I. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $x^n = e$, pentru orice $x \in G$, se numeşte *exponentul* grupului G.

a) Pentru orice număr prim p, $p \geq 3$, arătați că grupul multiplicativ, G_p al matricelor de forma $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbf{Z}_p$ este *necomutativ* și are *exponentul p*.

b) Arătați că dacă $(G, \circ)$ și $(H, \bullet)$ sunt grupuri finite cu *exponenții* respectiv m și n, atunci grupul $(G \times H, *)$ cu operația dată de $(g, h) * (g', h') = (g \circ g', h \bullet h')$, pentru orice $(g, h), (g', h') \in G \times H$, are *exponentul* cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n.

c) Deduceți că orice număr natural $n \geq 3$ este *exponentul* unui grup finit necomutativ.

Ion Savu

Soluție:

a) Justificarea necomutativității și a faptului că din $A=I_3 + B$ cu $B^3 = 0$ rezultă $A^p = I_3$.

b) Fie k exponentul lui $G \times H$. Rezultă $(g, h)^k = (e_1, e_2)$, deci $g^k = e_1$, $h^k = e_2$, pentru oricare $g \in G$, $h \in H$, deci $n \mid k$ și $m \mid k$. Așadar $[m, n] \mid k$. Rezultă $k = [m, n]$.

c) Dacă $n = 4$ considerăm grupul D_4.

Dacă $n \neq 2^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) alegem $G = G_p \times \mathbf{Z}_m$, unde p este prim cu $p \geq 3$ și $p \mid n$.

Pentru $n = 2^k$, $k \geq 3$ considerăm $G = D_4 \times \mathbf{Z}_n$.

II. Fie funcțiile continue f, $g : [0,1] \to (0,\infty)$, diferite, astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$.

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_n = \int_0^1 \frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n}dx$.

a) Arătați că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$;

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton.

Dan Marinescu, Viorel Cornea

Soluție:

a) Există $c \in [0,1]$ cu $f(c) > g(c)$; din continuitate există $\lambda > 1$ și $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ astfel ca $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \lambda$ pe $[\alpha, \beta]$. Atunci $x_n \geq \int_\alpha^\beta f(x)\lambda^n dx$, de unde $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Integrăm inegalitatea numerică

$$f^{n+1}(x) + g^{n+1}(x) \geq f^n(x)g(x) + f(x)g^n(x).$$

Folosind ipoteza rezultă $(x_n)_{n\geq 0}$ crescător.

III. Fie K un corp finit astfel încât polinomul $X^2 - 5$ este ireductibil în $K[X]$. Arătați că:

a) $1 + 1 \neq 0$;

b) pentru orice $a \in K$, polinomul $X^5 + a$ este reductibil în $K[X]$.

Marian Andronache

Soluție:

a) Dacă $1 + 1 = 0$ rezultă $x2 - 5 = (x - 1)(x + 1)$, fals.

b) $a^5 - 1 = 4^{-1}a^2(a - 1)((2a^2 + 2a^{-1} + 1)^2 - 5)$ pentru orice $a \in K^*$. Dacă $a^5-1=0$ rezultă $a = 1$ şi $f : \mathbf{K}^* \to \mathbf{K}^*, f(x) = x^5$ injectivă, deci bijectivă. Rezultă $X^5 + a = X^5 + b^5 = (X + b)(\ldots)$ şi deci reductibilitatea polinomului.

IV. Se consideră funcțiile continue $f : [0,\infty] \to \mathbf{R}$ şi $g : [0,1] \to \mathbf{R}$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbf{R}$, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx = L\int_0^1 g(x)dx$.

***

Soluție: Considerăm $h = f - L$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$. Atunci

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx = \frac{1}{n}\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx + \frac{L}{n}\int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right)dx.$$

Ultima integrală este $L\int_0^1 g(x)dx$ prin schimbare de variabilă.

Orice raționament echivalent cu cel de până aici

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx\right| \le \frac{M}{n}\int_0^n |h(x)|dx,$$

unde M este o margine pentru g (sau raționament echivalent).

Fie H o primitivă pentru $|h|$; avem cu L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} = \lim_{x\to\infty}|h(x)| = 0 \text{ şi deci } \frac{M}{n}\int_0^n |h(x)|dx \to 0.$$