IV. Se dau numerele reale a, b, c, d cu $a > c > d > b > 1$ astfel ca $ab > cd$. Demonstrați că funcția $f : [0,\infty] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$, pentru orice $x \geq 0$, este strict crescătoare.

Cristinel Mortici

Soluție: $f(x) = \left(a^x + b^x - c^x - \left(\dfrac{ab}{c}\right)^x\right) + d^x\left(\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^x - 1\right)$

$$a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x = \ldots = c^x\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right)$$

$g(x) = d^x\left(\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^x - 1\right)$ strict crescătoare

$h(x) = c^x\left(\left(\dfrac{a}{c}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\dfrac{b}{c}\right)^x\right)$ strict crescătoare.

CLASA A XI-A

I. În reperul cartezian xOy se consideră punctele coliniare $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,4}$, astfel încât să existe matrice inversabile $M \in M_4(\mathbf{C})$ în care primele două dintre linii sunt (x_1, x_2, x_3, x_4) și (y_1, y_2, y_3, y_4). Arătați că suma elementelor matricei M^{-1} nu depinde de matricea M dată.

Marian Andronache

Soluție: Punctele A_i se află pe dreapta $ax + by + c = 0$ ($c \neq 0$ căci altfel M ar fi singulară). $M^{-1} = (z_{hk})$. Avem $\sum_{h=1}^{4} x_h z_{hk} = \delta_{1k}$, $\sum_{h=1}^{4} y_h z_{hk} = \delta_{2k}$.

Prin însumare $\sum_{h=1}^{4} (ax_h + by_h) z_{hk} = a\delta_{1k} + b\delta_{2k}$.

Concluzia $\sum_{h,k=1}^{4} z_{hk} = \dfrac{a+b}{-c}$.

II. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă în 0 și 1, care are limite laterale în orice punct și care verifică $f(x - 0) \leq f(x) \leq f(x + 0)$ pentru orice $x \in (0,1)$. Arătați că:

a) pentru mulțimea $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$, avem $\sup A \in A$;

b) există $x_0 \in [0,1]$ astfel ca $f(x_0) = x_0$.

Mihai Piticari

Soluție:

a) Cazurile $\sup A = 0$ și $\sup A = 1$.
Cazul $\sup A \in (0,1)$.

b) $x_0 = \sup A$

Cazul $x_0 = 0$

Cazul $x_0 = 1$

Cazul $x_0 \in (0, 1)$

III. a) Arătaţi că orice matrice $A \in M_4(\mathbf{C})$ se poate scrie ca suma a 4 matrice $B_i \in M_4(\mathbf{C})$, $i = \overline{1,4}$ de rang 1.

b) Arătaţi că I_4 nu se poate scrie ca suma a mai puţin de 4 matrice de rang 1.

Manuela Prajea, Ioan Savu

Soluţie:

a) Dacă A nu are coloane nule, A se poate scrie, de exemplu, ca sumă de matrice cu câte o singură coloană nenulă. Cazul în care A are coloane nulă şi cel puţin una nenulă. Pentru $A = 0$ se ia $B_1 = B_2 = B_3$ cu $b_{11} = 1$ şi $b_{ij} = 0$ iar B_4 cu -3 pe poziţia $(1,1)$ şi 0 în rest.

b) Se arată, de exemplu, că pentru $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, rang $A = k$, rang $B = 1$ avem rang $(A + B) \le k + 1$

IV. Fie $\alpha > 1$ şi $f : \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right] \to \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right]$, bijectivă. Dacă $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right]$, arătaţi că:

a) f are cel puţin un punct de discontinuitate;

b) dacă f este continuă în 1, atunci f are o infinitate de puncte de discontinuitate;

c) există o funcţie f care verifică condiţiile din enunţ şi are un număr finit de puncte de discontinuitate.

Radu Mortici

Soluţie:

a) f continuă atrage f strict monotonă, deci f^{1} şi f au monotonii diferite, absurd.

b) $f(1) = 1$. Dacă f continuă în 1 cu un număr finit de discontinuităţi există $a < 1 < b$ astfel ca $f|_{(a,b)}$ continuă şi se aplică a).

c) Corespondenţa e de tipul (aici $\alpha = 3$):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

şi $f : (2, 3) \to (1/2, 1)$ prin $f(x) = \frac{x-1}{2}$. Condiţia $f^{-1} = \frac{1}{f}$ defineşte unic f pe fiecare dintre intervalele $(1/2, 1)$, $(1/3, 1/2)$, $(1, 2)$.

CLASA A XII-A

I. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $x^n = e$, pentru orice $x \in G$, se numeşte *exponentul* grupului G.