Pentru cel mai mic element a' al mulțimii M, există $b', c' \in B$ cu $b', c' < 0$, $b' \neq c'$ astfel ca $a' = b' + c'$, deci M are cel puțin 6 elemente

CLASA A X-A

I. În interiorul unui cub se consideră 2003 puncte. Arătați că se poate împărți cubul în mai mult de 2003^3 cuburi astfel încât orice punct din cele date să se afle în interiorul unuia dintre cuburile mici (și nu pe fețe).

***

Soluție: Considerăm cubul cu 3 muchii, de lungime 1, pe axele de coordonate pozitive și unul din vârfurile în origine. Fie $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2003$ punctele date. E suficient să găsim $n > 2003$ astfel ca $x_k, y_k, z_k \notin \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$. Fie, de exemplu, $n \geq 2003$ prim mai mare ca 2003 ce nu este în descompunerea numitorilor coordonatelor raționale ale punctelor P_k (cazul coordonatelor iraționale fiind evident)

II. a) Determinați toate funcțiile $f : \mathbf{N}^* \to M$ cu proprietatea:

$$1 + f(n)f(n+1) = 2n^2\,(f(n+1) - f(n)), \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}^*$$

în fiecare dintre următoarele situații

a) $M = \mathbf{N}$; b) $M = \mathbf{Q}$.

***

Soluție:

a) $(2 - f(1))\,(2 + f(2)) = 5$ implică $f(1) = 1$, $f(2) = 3$. Inducție: $f(n) = 2n - 1$.

b) $Xn = \operatorname{arctg} f(n)$

$$x_{k+1} - x_k = arctg\,\frac{1}{2k^2} + p_k\pi\,,\ p_k \in \mathbf{Z}.$$

$$x_n = arctg(2n-1) + x_1 - \frac{\pi}{4} + l_n\pi\,,\ l_n \in \mathbf{Z}.$$

$$f(n) = \frac{n(a+1)-1}{a - n(a-1)}\,,\ \text{cu } a = f(1) \neq \frac{n}{n-1}\,,\ n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}.$$

III. a) Dacă ABC este un triunghi și M un punct în planul său, arătați că

$$AM \sin A \leq BM \sin B + CM \sin C.$$

b) Fie A_1, B_1, C_1 puncte pe laturile (BC), (AC) și respectiv (BA) ale triunghiului ABC, astfel încât unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt în această ordine de măsuri α, β, γ. Arătați că:

$$\sum AA_1 \sin\alpha \leq \sum BC \sin\alpha\,.$$

Dan Marinescu, Viorel Cornea

Soluție:

a) $AM \cdot BC \leq BM \cdot AC + CM \cdot AB$ (eventual folosind relația $\sum (z - z_1)(z_2 - z_3) = 0$) și folosind teorema sinusurilor, rezultă concluzia

b) Din a) rezultă $AA_1 \sin\alpha \leq AB_1 \sin\beta + AC_1 \sin\gamma$ și analoagele și prin însumare se obține relația cerută.

IV. Se dau numerele reale a, b, c, d cu $a > c > d > b > 1$ astfel ca $ab > cd$. Demonstrați că funcția $f : [0,\infty] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$, pentru orice $x \geq 0$, este strict crescătoare.

Cristinel Mortici

Soluție: $f(x) = \left(a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x \right) + d^x \left(\left(\frac{ab}{cd}\right)^x - 1 \right)$

$$a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x = \ldots = c^x \left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x \right)$$

$g(x) = d^x \left(\left(\frac{ab}{cd}\right)^x - 1 \right)$ strict crescătoare

$h(x) = c^x \left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x \right)$ strict crescătoare.

CLASA A XI-A

I. În reperul cartezian xOy se consideră punctele coliniare $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,4}$, astfel încât să existe matrice inversabile $M \in M_4(\mathbf{C})$ în care primele două dintre linii sunt (x_1, x_2, x_3, x_4) și (y_1, y_2, y_3, y_4). Arătați că suma elementelor matricei M^{-1} nu depinde de matricea M dată.

Marian Andronache

Soluție: Punctele A_i se află pe dreapta $ax + by + c = 0$ ($c \neq 0$ căci altfel M ar fi singulară). $M^{-1} = (z_{hk})$. Avem $\sum_{h=1}^{4} x_h z_{hk} = \delta_{1k}$, $\sum_{h=1}^{4} y_h z_{hk} = \delta_{2k}$.

Prin însumare $\sum_{h=1}^{4} (a x_h + b y_h) z_{hk} = a\delta_{1k} + b\delta_{2k}$.

Concluzia $\sum_{h,k=1}^{4} z_{hk} = \frac{a+b}{-c}$.

II. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă în 0 și 1, care are limite laterale în orice punct și care verifică $f(x - 0) \leq f(x) \leq f(x + 0)$ pentru orice $x \in (0,1)$. Arătați că:

a) pentru mulțimea $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$, avem $\sup A \in A$;

b) există $x_0 \in [0,1]$ astfel ca $f(x_0) = x_0$.

Mihai Piticari

Soluție:

a) Cazurile $\sup A = 0$ și $\sup A = 1$.
Cazul $\sup A \in (0,1)$.

b) $x_0 = \sup A$
Cazul $x_0 = 0$