CLASA A IX-A

I. Determinați funcțiile $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq 1$, $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ este un cub perfect cel mult egal cu n^3.

Lucian Dragomir, Dinu Şerbănescu

Soluție: Justificarea faptului că $f(1), f(1) + f(2), \ldots, f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ sunt $1^3, 2^3, \ldots, n^3$, în această ordine.

$f(n) = (f(1) + \ldots + f(n)) - (f(1) + \ldots + f(n-1)) = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ pentru orice $n \geq 2$ și $f(1) = 1$.

II. Aflați $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ și cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel ca $\sqrt{\overline{a_1a_2...a_n}} - \sqrt{\overline{a_1a_2...a_{n-1}}} = a_n$.

Gheorghe Iurea

Soluție: Ecuația este de forma $\sqrt{10A + a} - \sqrt{A} = a$. $9 \geq a \geq \sqrt{10A} - \sqrt{A}$ implică $A \leq (\sqrt{10} + 1)^2 = 17$.

Finalizare: $A = 16$ și numărul este 169.

III. Pe o tablă sunt desenate punctele A, B, C, D. Vlad construiește punctele A', B', C', D' astfel: A' este simetricul lui A față de B, B' este simetricul lui B față de C, C' este simetricul lui C față de D, iar D' este simetricul lui D față de A. Maria șterge de pe tablă punctele A, B, C, D. Poate Vlad să refacă pozițiile acestor puncte? Justificați răspunsul, folosind eventual vectori.

***

Soluție: Fie $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{CD}, d = \overrightarrow{DA}, x = \overrightarrow{A'B'}, \ldots, t = \overrightarrow{D'A'}$

$x = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = -a + 2b$ și analoagele

$a = 2b - x = \ldots = 16a - 8t - 4z - 2y - x$ de unde cum $x + y + z + t = 0$, rezultă $a = \dfrac{1}{15}(y + 3z + 7t)$ și analoagele. Finalizarea cu afirmarea unicității.

IV. Spunem că o mulțime A de vectori nenuli din plan are proprietatea (S) dacă are cel puțin trei elemente și pentru orice $\vec{u} \in A$ există $\vec{v}, \vec{w} \in A$ astfel încât $\vec{v} \neq \vec{w}$ și $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

a) Demonstrați că, pentru orice $n \geq 6$, există o mulțime cu n vectori nenuli, care are proprietatea (S);

b) Demonstrați că orice mulțime finită de vectori nenuli, care are proprietatea (S), are cel puțin 6 elemente.

Mihai Bălună

Soluție:

a) Pentru $n = 6$, considerăm vectorii ce unesc centrul unui hexagon regulat cu vârfurile. Inducție după n, pentru $A = \{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n\}$. Există $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in A, i \neq j$, astfel ca $\vec{v}_i + \vec{v}_j \notin A$. Luăm $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}_i + \vec{v}_j\}$.

b) Fie $A = \{\overrightarrow{OX}_1, \ldots, \overrightarrow{OX}_n\}$. Alegem două axe neparalele de versori $\vec{u}, \vec{v}$ și neparalele cu nici unul dintre vectorii $\overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $\overrightarrow{X_1X_2}, \ldots, \overrightarrow{X_{n-1}X_n}$. Fie $\overrightarrow{OX_i} = a_i\vec{u} + b_i\vec{v}$. Mulțimea $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de numere reale are proprietatea analoagă cu (S). Fie a cel mai mare element al ei. Avem $a > 0$;I există $b, c > 0$ cu $a = b + c$, $b \neq c$.

Pentru cel mai mic element a' al mulțimii M, există $b', c' \in B$ cu $b', c' < 0$, $b' \neq c'$ astfel ca $a' = b' + c'$, deci M are cel puțin 6 elemente

CLASA A X-A

I. În interiorul unui cub se consideră 2003 puncte. Arătați că se poate împărți cubul în mai mult de 2003^3 cuburi astfel încât orice punct din cele date să se afle în interiorul unuia dintre cuburile mici (și nu pe fețe).

***

Soluție: Considerăm cubul cu 3 muchii, de lungime 1, pe axele de coordonate pozitive și unul din vârfurile în origine. Fie $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2003$ punctele date. E suficient să găsim $n > 2003$ astfel ca $x_k, y_k, z_k \notin \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$. Fie, de exemplu, $n \geq 2003$ prim mai mare ca 2003 ce nu este în descompunerea numitorilor coordonatelor raționale ale punctelor P_k (cazul coordonatelor iraționale fiind evident)

II. a) Determinați toate funcțiile $f : \mathbf{N}^* \to M$ cu proprietatea:

$$1 + f(n)f(n+1) = 2n^2 (f(n+1) - f(n)),\ \text{pentru orice } n \in \mathbf{N}^*$$

în fiecare dintre următoarele situații

a) $M = \mathbf{N}$; b) $M = \mathbf{Q}$.

***

Soluție:

a) $(2 - f(1))(2 + f(2)) = 5$ implică $f(1) = 1, f(2) = 3$. Inducție: $f(n) = 2n - 1$.

b) $Xn = \operatorname{arctg} f(n)$

$$x_{k+1} - x_k = arctg\frac{1}{2k^2} + p_k\pi,\ p_k \in \mathbf{Z}.$$

$$x_n = arctg(2n-1) + x_1 - \frac{\pi}{4} + l_n\pi,\ l_n \in \mathbf{Z}.$$

$$f(n) = \frac{n(a+1)-1}{a-n(a-1)},\ \text{cu } a = f(1) \neq \frac{n}{n-1},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}.$$

III. a) Dacă ABC este un triunghi și M un punct în planul său, arătați că

$$AM \sin A \leq BM \sin B + CM \sin C.$$

b) Fie A_1, B_1, C_1 puncte pe laturile (BC), (AC) și respectiv (BA) ale triunghiului ABC, astfel încât unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt în această ordine de măsuri α, β, γ. Arătați că:

$$\sum AA_1 \sin\alpha \leq \sum BC \sin\alpha.$$

Dan Marinescu, Viorel Cornea

Soluție:

a) $AM \cdot BC \leq BM \cdot AC + CM \cdot AB$ (eventual folosind relația $\sum (z - z_1)(z_2 - z_3) = 0$) și folosind teorema sinusurilor, rezultă concluzia

b) Din a) rezultă $AA_1 \sin\alpha \leq AB_1 \sin\beta + AC_1 \sin\gamma$ și analoagele și prin însumare se obține relația cerută.