III. Un grilaj pătrat este construit din $2n$ bare verticale şi $2n$ bare orizontale echidistante. Se vopsesc cu roşu n bare verticale şi n bare orizontale, restul barelor vopsindu-se cu negru.

Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât, oricum am vopsi barele, după regula de mai sus, să existe un pătrat format din intersecţia unor bare de aceeaşi culoare.

Radu Gologan

Soluţie: $n = 1$ şi $n = 2$ nu.convin. Notăm $A_1, A_2, \ldots, A_6$ barele orizontale $B_1, B_2, \ldots, B_6$ barele verticale. În fiecare grupă exact trei sunt roşii. Să presupunem că barele A_1, A_2, A_3 sunt roşii. Din cele 3 bare verticale roşii două sunt situate la distanţă de 1 sau 2 şi obţinem deci un pătrat roşu de dimensiune 1 sau 2. Analog tratăm cazul când A_1, A_2, A_4 sunt roşii (cele trei sau verticale roşii ar trebui să fie la distanţe relative mai mari decât 4). Analog se tratează celelalte cazuri, de exemplu când A_1, A_2, A_6 sunt roşii examinăm barele negre.

IV. Fie ABC un triunghi oarecare. Fie B' simetricul lui B faţă de C, C' simetricul lui C faţă de A şi A' simetricul lui A faţă de B.

a) Demonstraţi că aria triunghiului $AC'A'$ este dublul ariei triunghiului ABC.

b) Dacă ştergem punctele A, B, C, cum pot fi ele reconstituite? Justificaţi raţionamentul.

Bogdan Enescu

Soluţie:

a) Mediana împarte un triunghi în suprafeţe echivalente de unde concluzia.

b) Fie $\{M\} = AC \cap A'B'$, rezultă $\dfrac{\sigma(AA'C')}{\sigma(AC'B')} = \dfrac{A'M}{MB'} = 2$. Considerăm punctele M, N, P pe $A'B'$, $A'C'$, $C'B'$ respectiv, astfel ca $A'M = 2MB'$, $NC' = 2NA'$, $PB' = 2PC'$. Rezultă că $C'M \cap A'P = \{A\}$ şi analoagele.

CLASA A VIII-A

I. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' şi BB' de aceeaşi parte a planului, astfel încât $AA' = AB$ şi $BB' = \dfrac{1}{2}AB$. Determinaţi măsura unghiului dintre planele (ABC) şi $(A'B'C')$.

Soluţie: $(A'B'C') \cap (ABC) = CD$ unde $\{D\} = A'B' \cap AB$.

$CB = \dfrac{AD}{2}$ implică $m(\angle ACD) = 90°$

$A'C \perp CD$ rezultând astfel $m(\angle[(A'B'C); (ABC)]) = m(\angle A'CA) = 45°$

Neculai Solomon

II. Fie o mulţime finită $M \subset \mathbf{R}$ care are cel puţin două elemente. Spunem că funcţia f are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $f: M \to M$ şi există $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = ax + b$.

a) Arătaţi că există cel puţin o funcţie cu proprietatea $\mathcal{P}$,

b) Arătaţi că există cel mult două funcţii cu proprietatea $\mathcal{P}$,

c) Dacă M are 2003 elemente cu suma 0 şi dacă există două funcţii cu proprietatea $\mathcal{P}$, arătaţi că $0 \in M$.

Gabriel Popa

Soluţie:

a) $f: M \to M, f(x) = x$ are proprietatea $\mathcal{P}$.

b) Dacă $a > 0$ şi f are $\mathcal{P}$ rezultă $a = 1$, $b = 0$, deci $f(x) = x$.

O a doua funcţie apare eventual dacă $a < 0$, şi întrucât $f \circ f$ are proprietatea $\mathcal{P}$ în acest caz $f(x) = -x + b$

c) Presupunem $M = \{x_1, \ldots, x_{2003}\}$ cu $x_1 < \ldots < x_{2003}$. $f_1(x) = x$ are $\mathcal{P}$ şi presupunem $f_2(x) = ax + b$ are $\mathcal{P}$.

Suma elementelor din M este $S=x_1+\ldots+x_{2003}$ şi totodată $S=a(x_1+\ldots+x_{2003})+2003b$. Rezultă $(x_1 + \ldots + x_{2003})(1 - a) = 2003b$, adică $b = 0$

$f_2(x) = ax$ şi $a < 0$ implică $f_2(x_1) = x_{2003}$ şi $f_2(x_{2003}) = x_1$, de unde $a(x_1 + x_{2003}) = x_1 + x_{2003}$, deci $x_{2003} = -x_1$.

Analog $f(x) = -x$, $\forall\ x \in M$. Rezultă M simetrică şi cum are un număr impar de elemente, $0 \in M$.

III. Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie şi fiecare coloană să avem n căsuţe ($n \geq 2$) care se completează cu numere întregi. Determinaţi în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie şi coloană este 5 sau –5.

Mariana Coadă

Soluţie: Pe fiecare coloană sau linie există exact un ± 5. Valorile ± 5 pot fi plasate în $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot 2^n$ moduri (câte un singur astfel de număr pe fiecare linie sau coloană). Restul căsuţelor vor fi completate cu ± 1 în 2^{n^2-n} moduri. În total $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot 2^{n^2}$ moduri de completare.

IV. a) Fie MNP un triunghi astfel încât $\angle MNP > 60°$. Arătaţi că latura MP nu poate fi cea mai mică latură a triunghiului MNP.

b) Într-un plan se consideră triunghiul echilateral ABC. Punctul V care nu aparţine planului (ABC) este ales astfel încât $\angle VAB = \angle VBC = \angle VCA$. Arătaţi că dacă $VA = AB$, tetraedrul $VABC$ este regulat.

Valentin Vornicu

Soluţie:

a) Prin reducere la absurd: $m(\angle MPN) \geq m(\angle MNP) > 60°$ şi $m(\angle PMN) \geq m(\angle MNP) > 60°$.

$180° = m(\angle MPN) + m(\angle MNP) + m(\angle PMN) > 180°$, contradicţie.

b) Fie $m(\angle VAB) = \alpha$, pentru a arăta că $\alpha = 60°$, ceea ce rezolvă problema, procedăm prin reducere la absurd:

Dacă $\alpha > 60°$ avem $VB > VA$ din triunghiul VAB conform a). Avem şi $VC < VA$ în triunghiul VAC. În triunghiul VBC, cum $VC < BC$ vom avea neapărat $VC > VB$, contradicţie.

Cazul $\alpha < 60°$ tratat analog cu reformularea punctului *a*) corespunzător.