Etapa județeană și a Municipiului București
8 martie 2003

CLASA A VII-A

I. Determinați mulțimile disjuncte B și C știind că $B \cup C = \{1,2,\ldots,10\}$ și produsul elementelor mulțimii B este egal cu suma elementelor mulțimii C.

Ioan Bogdan

Soluție: Suma elementelor mulțimii $B \cup C$ este 55.

Dacă $B = \{x, y\}$, atunci suma elementelor lui C este $55 - x - y$, deci trebuie să avem $xy + y + x + 1 = 56$ adică $(x+1)(y+1) = 7 \cdot 8$, prin urmare $B=\{6, 7\}$ și $C = \{1,2,3,4,5,8,9,10\}$.

Dacă $B = \{x, y, z\}$ cu $x < y < z$, atunci $xyz + x + y + z = 55$. Pentru $x=1$ obținem $(y+1)(z+1)=55$ de unde $B = \{x,y,z\} = \{1,4,10\}$, și $C = \{2,3,5,6,7,8,9\}$. Pentru $x = 2$ ar trebui $2yx + y + z - 53 = 0$ sau $4yz + 2y + 2z - 106 = 0$

$(2y + 1)(2z + 1) = 107$ ceea ce nu se poate.

Pentru $x = 3$ ar trebuie $xyz = 55 - xy - z$, dar membrul stâng e cel puțin $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ și nu poate fi egal cu membrul drept.

Dacă $B=\{x, y, z, t\}$ cu $x < y < z < t$ ar trebui să avem $xyzt = 55 - x - y - z - t$ posibil numai dacă $x = 1$, $y = 2$ deci $2zt - z + t = 52$

$(2z + 1)(2t + 1)=105 = 7 \cdot 15$ deci $B=\{1, 2, 3, 7\}$, $C = \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

B nu poate avea 5 elemente căci produsul lor ar fi cel puțin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ care nu poate fi egal cu suma elementelor lui C.

II. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90°$), D este intersecția bisectoarei unghiului A cu latura (BC), iar P și Q sunt proiecțiile punctului D pe laturile (AB), respectiv (AC). Dacă $BQ \cap DP = \{M\}$, $CP \cap DQ = \{N\}$, $BQ \cap CP = \{H\}$, arătați că:

a) $PM = DN$;
b) $MN \parallel BC$;
c) $AH \perp BC$.

Mircea Fianu

Soluție:

a) Cum $\Delta BPM \approx \Delta BAQ$ rezultă $\dfrac{PM}{AQ} = \dfrac{BP}{BA}$

$DQ \parallel BA$ implică $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{DN}{DQ}$ și cum $DQ = AQ$ (ΔAQD = dr. isoscel) rezultă concluzia.

b) $DP \parallel AC$ implică $\dfrac{PM}{PD} = \dfrac{AQ}{AC}$ și $QN \parallel AP$ implică $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PN}{PC}$, deci $MN \parallel BC$.

c) $\Delta APM \equiv \Delta PDN$ implică $AM \perp PN$.

H ortocentrul triunghiului AMN și $MN \parallel BC$ implică $AH \perp BC$.

III. Un grilaj pătrat este construit din $2n$ bare verticale şi $2n$ bare orizontale echidistante. Se vopsesc cu roşu n bare verticale şi n bare orizontale, restul barelor vopsindu-se cu negru.

Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât, oricum am vopsi barele, după regula de mai sus, să existe un pătrat format din intersecţia unor bare de aceeaşi culoare.

Radu Gologan

Soluţie: $n = 1$ şi $n = 2$ nu.convin. Notăm $A_1, A_2, \ldots, A_6$ barele orizontale $B_1, B_2, \ldots, B_6$ barele verticale. În fiecare grupă exact trei sunt roşii. Să presupunem că barele A_1, A_2, A_3 sunt roşii. Din cele 3 bare verticale roşii două sunt situate la distanţă de 1 sau 2 şi obţinem deci un pătrat roşu de dimensiune 1 sau 2. Analog tratăm cazul când A_1, A_2, A_4 sunt roşii (cele trei sau verticale roşii ar trebui să fie la distanţe relative mai mari decât 4). Analog se tratează celelalte cazuri, de exemplu când A_1, A_2, A_6 sunt roşii examinăm barele negre.

IV. Fie ABC un triunghi oarecare. Fie B' simetricul lui B faţă de C, C' simetricul lui C faţă de A şi A' simetricul lui A faţă de B.

a) Demonstraţi că aria triunghiului $AC'A'$ este dublul ariei triunghiului ABC.

b) Dacă ştergem punctele A, B, C, cum pot fi ele reconstituite? Justificaţi raţionamentul.

Bogdan Enescu

Soluţie:

a) Mediana împarte un triunghi în suprafeţe echivalente de unde concluzia.

b) Fie $\{M\} = AC \cap A'B'$, rezultă $\dfrac{\sigma(AA'C')}{\sigma(AC'B')} = \dfrac{A'M}{MB'} = 2$. Considerăm punctele M, N, P pe $A'B'$, $A'C'$, $C'B'$ respectiv, astfel ca $A'M = 2MB'$, $NC' = 2NA'$, $PB' = 2PC'$. Rezultă că $C'M \cap A'P = \{A\}$ şi analoagele.

CLASA A VIII-A

I. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' şi BB' de aceeaşi parte a planului, astfel încât $AA' = AB$ şi $BB' = \dfrac{1}{2}AB$. Determinaţi măsura unghiului dintre planele (ABC) şi $(A'B'C')$.

Soluţie: $(A'B'C') \cap (ABC) = CD$ unde $\{D\} = A'B' \cap AB$.

$CB = \dfrac{AD}{2}$ implică $m(\angle ACD) = 90°$

$A'C \perp CD$ rezultând astfel $m(\angle[(A'B'C); (ABC)]) = m(\angle A'CA) = 45°$

Neculai Solomon

II. Fie o mulţime finită $M \subset \mathbf{R}$ care are cel puţin două elemente. Spunem că funcţia f are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $f: M \to M$ şi există $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = ax + b$.

a) Arătaţi că există cel puţin o funcţie cu proprietatea $\mathcal{P}$,

b) Arătaţi că există cel mult două funcţii cu proprietatea $\mathcal{P}$,