Ministerul Educaţiei şi Cercetării

**Olimpiada de Matematică**
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

**CLASA A XI-A**

**Problema 1.** Fie $x > 0$ un număr real şi $A$ o matrice pătrată de ordin 2, care are elemente reale şi verifică relaţia

$$\det(A^2 + xI_2) = 0.$$

Demonstraţi că $\det(A^2 + A + xI_2) = x$.

**Problema 2.** Considerăm două numere întregi $n, p \geq 2$ şi o matrice pătrată $A$ de ordin $n$, care are elemente reale şi verifică relaţia $A^{p+1} = A$.

a) Demonstraţi că $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(I_n - A^p) = n$.

b) Demonstraţi că dacă, în plus, $p$ este prim atunci

$$\operatorname{rang}(I_n - A) = \operatorname{rang}(I_n - A^2) = \ldots = \operatorname{rang}(I_n - A^{p-1}).$$

**Problema 3.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale care verifică relaţia

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 1) \leq 0, \quad n \geq 0.$$

a) Demonstraţi că şirul este mărginit.

b) Este posibil ca şirul să nu fie convergent?

**Problema 4.** Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă, pentru orice $x$ real,

$$\sup_{t \leq x} f(t) = x.$$

a) Daţi un exemplu de funcţie care are proprietatea (P) şi este discontinuă în fiecare punct real.

b) Demonstraţi că dacă $f$ este continuă şi are proprietatea (P) atunci $f$ este funcţia identică.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.