CLASA A VI-A

PROBLEMA 1

a) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow \frac{10a}{10c}=\frac{b}{d}=\frac{10a+b}{10c+d}=\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$. **1p**

În mod asemănător se arată că $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{\overline{ba}}{\overline{dc}}$. **1p**

b) Notăm $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{\overline{ba}}{\overline{dc}}=k$ şi obținem $\overline{ab}=k\cdot\overline{cd}$, $a=k\cdot c$, $b=k\cdot d$, $\overline{ba}=k\cdot\overline{dc}$. **1p**

Cum $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$, relația $\overline{ab}+a+b+\overline{ba}=96$ devine $12(a+b)=96$, sau $a+b=8$. **1p**

$a+b=8 \Rightarrow k\cdot c+k\cdot d=8 \Rightarrow k(c+d)=8 \Rightarrow k=2$. **1p**

Cum $c+d=4$, $c\neq d$ iar c şi d sunt cifre nenule, se pot distinge două cazuri:

1) c = 1, d = 3 şi obținem a = 2, b = 6, deci $\overline{abcd}=2613$; **1p**

2) c = 3, d = 1 şi obținem a = 6, b = 2, deci $\overline{abcd}=6231$. **1p**

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător

CLASA A VI-A

PROBLEMA 2

Numerele naturale de cel puțin două cifre pentru care suma cifrelor este 1, sunt de forma $10^m,\ m\in N^*$. **1p**

Presupunem că numărul $10^m,\ m\in N^*$ „îşi atinge scopul”. Înseamnă că există $n\in N^*$ astfel încât $10^m=1+2+\ ...\ +n \Rightarrow 10^m\cdot 2=n(n+1)\Rightarrow 2^{m+1}\cdot 5^m=n(n+1)$. **1p**

De aici va rezulta că n şi n+1 sunt divizori naturali ai numărului $2^{m+1}\cdot 5^m$, adică există a, b, c, d $\in N$ astfel încât $n+1=2^a\cdot 5^b$ şi $n=2^c\cdot 5^d$, iar $a+c=m+1,\ b+d=m$. **1p**

Înseamnă că $2^a\cdot 5^b-2^c\cdot 5^d=1$, cu discuția cazurilor:

1) $a\le c,\ b\le d\Rightarrow 2^a\cdot 5^b\left(1-2^{c-a}\cdot 5^{d-b}\right)=1\Rightarrow a=b=0\Rightarrow 2^{c-a}\cdot 5^{d-b}=0$, imposibil;

2) $a\le c,\ b\ge d\Rightarrow 2^a\cdot 5^d\left(5^{b-d}-2^{c-a}\right)=1\Rightarrow a=d=0\Rightarrow 5^{b-d}-2^{c-a}=0\Rightarrow 5^m-2^{m+1}=1$, $m\in N^*$.

3) $a\ge c,\ b\le d\Rightarrow 2^c\cdot 5^b\left(2^{a-c}-5^{d-b}\right)=1\Rightarrow c=b=0\Rightarrow 2^{a-c}-5^{d-b}=0\Rightarrow 2^{m+1}-5^m=1$, $m\in N^*$. **2p**

4) $a\ge c,\ b\ge d\Rightarrow 2^c\cdot 5^d\left(2^{a-c}\cdot 5^{b-d}-1\right)=1\Rightarrow c=d=0\Rightarrow 2^a\cdot 5^b=2\Rightarrow a=1,\ b=0$. Cum $a+c=m+1,\ b+d=m$, rezultă că m=0 şi $10^m=1$, nu convine.

Să rezolvăm acum, în mulțimea numerelor naturale nenule, ecuația $5^m-2^{m+1}=1$.

Se observă că m=1 este soluție iar m=2 nu este soluție. Dacă vom lua acum m$\ge$3, vom avea $5^m>4^m>2\cdot 2^m+1=2^{m+1}+1\Rightarrow 5^m-2^{m+1}>1$. Înseamnă că m=1 este singura soluție a acestei ecuații. **1p**

Ecuația $2^{m+1}-5^m=1$, $m\in N^*$ nu are nici o soluție deoarece, pentru m$\ge$1, avem $1+5^m>1+4^m>2\cdot 2^m=2^{m+1}$.

În concluzie, există un singur număr cu suma cifrelor 1, care „îşi atinge scopurile”. Acesta este 10 iar 10 = 1+2+3+4. **1p**

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător

CLASA A VI-A

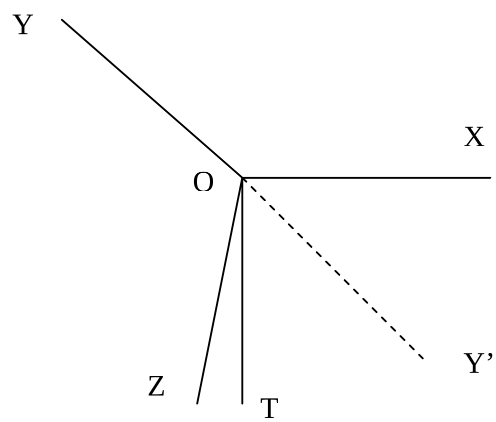
PROBLEMA 3

a) $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{4}=\frac{6c}{7}\Rightarrow\frac{12a}{18}=\frac{12b}{16}=\frac{12c}{14}=\frac{12\left(a+b+c\right)}{48}=\frac{12\cdot 360^0}{48}=90^0$. **1p**

De aici, $a=135^0$, $b=120^0$, $c=105^0$. **1p**

b) $\frac{a+c}{2}=\frac{135^0+105^0}{2}=120^0=b$ **1p**

c)



$\left.\begin{array}{l} OT\perp OX\Rightarrow m\left(\sphericalangle XOT\right)=90^0 \\ m\left(\sphericalangle XOZ\right)=105^0 \end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\sphericalangle ZOT\right)=15^0$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} m\left(\sphericalangle ZOT\right)=15^0 \\ m\left(\sphericalangle YOZ\right)=120^0 \end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\sphericalangle YOT\right)=135^0$ **1p**

Fie $[OY'$ semidreapta opusă lui $[OY$. Vom avea $m\left(\sphericalangle XOY'\right)=180^0-135^0=45^0$ şi **1p**
$m\left(\sphericalangle TOY'\right)=180^0-m\left(\sphericalangle YOT\right)=45^0$. De aici va rezulta că $[OY'$ este bisectoarea unghiului XOT. **1p**

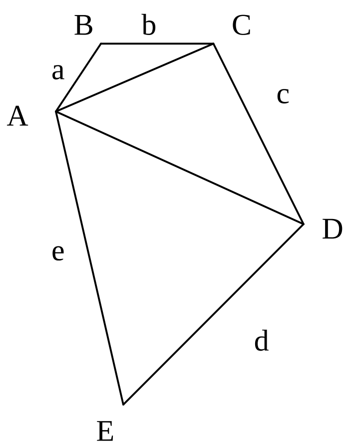
Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător

CLASA A VI-A

PROBLEMA 4

Vom nota lungimile laturilor poligonului dat, în ordine crescătoare, cu a, b, c, d, e, $a<b<c<d<e$ şi perimetrul cu x, $x = a+b+c+d+e$. Cum x trebuie să fie multiplu al fiecărei lungimi de laturi, înseamnă că există numerele naturale nenule m, n, p, q, r astfel încât $x = ma = nb = pc = qd = re$. **1p**

Ținând seama de faptul că $a<b<c<d<e$, va rezulta că $m>n>p>q>r$. **1p**



Dacă urmărim figura alăturată, avem:
$AC<a+b$, $AD<AC+c<a+b+c$,
$AE<AD+e<a+b+c+d$. Deci $e<a+b+c+d$.
Desenul al[turat este orientativ, laturile putând fi dispuse în altă ordine. Concluzia va fi aceeaşi. **1p**
Cum $e<a+b+c+d$, rezultă că $2e<a+b+c+d+e$, deci $2e<x \Rightarrow 2e<re \Rightarrow r>2 \Rightarrow r\geq 3$.

Pe de altă parte, avem $1=\frac{a+b+c+d+e}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x}+\frac{e}{x}=\frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$.

Problema se reduce la a afla numerele naturale $m>n>p>q>r\geq 3$ pentru care $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=1$. **1p**

Vom demonstra mai întâi că r = 3.

Într-adevăr, dacă $r\geq 4$, atunci $q\geq 5$, $p\geq 6$, $n\geq 7$, $m\geq 8$. În acest caz $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1$. **1p**

În mod similar deducem că q = 4.

Într-adevăr, dacă $q\geq 5$, atunci $p\geq 6$, $n\geq 7$, $m\geq 8$. În acest caz $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1$. **1p**

Continuând în acelaşi mod, obținem r = 3, q = 4, p = 5, n = 6, m = 20.

Deoarece x este multiplu comun al numerelor m, n, p, q, r, rezultă că x = 60k, unde $k\in N^*$. Cum $x<100$, înseamnă că x = 60.

Obținem, a = 3, b = 10, c = 12, d = 15, e = 20. **1p**

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător