CLASA A V-A

PROBLEMA 1

Presupunem că cele 2007 numere naturale nenule sunt distincte. **2p**

Atunci, suma lor este mai mare sau egală decât suma primelor 2007 numere naturale consecutive, adică este mai mare sau egală cu : **1p**

$$1+2+3+...+2007=\frac{2007\cdot 2008}{2}=2015028\ .$$ **2p** **1p**

Cum 2015027<2015028 $\Rightarrow$ două dintre numerele din suma dată sunt egale $\Rightarrow$ diferența lor este 0 $\Rightarrow$ 0 este multiplul oricărui număr natural nenul.

(0=0$\cdot$n , pentru orice număr natural n) **1p**

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător.

CLASA A V-A

PROBLEMA 2

Se observă că regula de formare a şirului dat este:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2=3^1-1\\ a_2=8=3^2-1\\ a_3=26=3^3-1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \boxed{\textbf{2p}}$$

Al n-lea termen al şirului este $a_n=3^n-1$, unde n este un număr natural nenul.
Deci, al 2007-lea termen al şirului va fi $a_{2007}=3^{2007}-1$. $\boxed{\textbf{1p}}$

$U(a_n)=U(3^n-1)=U(U(3^n)-1)$ $\boxed{\textbf{1p}}$

$U(3^{4k})=1$; $U(3^{4k+1})=3$; $U(3^{4k+2})=9$; $U(3^{4k+3})=7$, $(\forall)k\in N$ $\boxed{\textbf{2p}}$

Prin urmare, $U(a_{2007})=U(U(3^{2007})-1)=U(U(3^{4\cdot 501+3})-1)=U(7-1)=6$ $\boxed{\textbf{1p}}$

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător.

CLASA A V-A

PROBLEMA 3

a) $U(\mathbf{N})=U(\mathbf{1^{2007}} + \mathbf{(1\cdot 2)^{2007}} + \mathbf{(1\cdot 2\cdot 3)^{2007}} + \mathbf{...+} \mathbf{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2007)^{2007}})=$
$U(U(\mathbf{1^{2007}}) + U(\mathbf{(1\cdot 2)^{2007}}) + U(\mathbf{(1\cdot 2\cdot 3)^{2007}}) + \mathbf{...} + U(\mathbf{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2007)^{2007}})$ $\boxed{\mathbf{1p}}$
$U(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)=U(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot n)=0$, pentru orice număr natural n, mai mare sau egal cu 5. $\boxed{\mathbf{1p}}$
Prin urmare, $U(\mathbf{N})= U(U(\mathbf{1^{2007}}) + U(\mathbf{(1\cdot 2)^{2007}}) + U(\mathbf{(1\cdot 2\cdot 3)^{2007}}) + U(\mathbf{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^{2007}}))=$
$\mathbf{U(}U(\mathbf{1^{2007}})+U(\mathbf{2^{2007}})+U(\mathbf{6^{2007}})+U(\mathbf{4^{2007}}))=$
$\mathbf{U(1+8+6+4)=9}$ $\boxed{\mathbf{2p}}$
In concluzie, baza de numerație **b** este **9.** $\boxed{\mathbf{1p}}$

b) Transformând numărul **2007** $_{\mathbf{(9)}}$ din baza **9** în baza **10**, obținem :
$\mathbf{2007_{(9)}=2\cdot 9^3+7=1465.}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$

In concluzie, baza de numerație **(c)** este **10.** $\boxed{\mathbf{1p}}$

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător.

CLASA A V-A

PROBLEMA 4

Ultima cifră a pătratului unui număr natural nenul $\in \{0;1;4;5;6;9\}$
Ultima cifră a sumei **$(a+b)^2 + (b-a+7)^2$** este 7 $\Rightarrow$

$U((a+b)^2)$ =	1	6
$U((b-a+7)^2)$ =	6	1

$\boxed{\textbf{1p}}$

I) Dacă $U((a+b)^2) = 1 \Rightarrow a+b \in \{1;9;11\}$

I.1. a+b=1 – nu convine, pentru că a şi b sunt cifre , $a \neq 0$ şi b>a
I.2. a+b=9 , b>a $\Rightarrow$

b	***8***	7	6	5
a	***1***	2	3	4
b-a+7	***14***	12	10	8
$U((b-a+7)^2)$	***6***	4	0	4

Cum **$U((b-a+7)^2)$** trebuie să fie 6 $\Rightarrow$ singura soluție ar putea fi :
a=1; b=8 $\Rightarrow 9^2 + (8-1+7)^2 = 81 + 196 = 277 \neq 187 \Rightarrow$ a+b=9 nu convine

I.3. a+b=11 , b>a$\Rightarrow$

b	***9***	8	7	6
a	***2***	3	4	5
b-a+7	***14***	12	10	8
$U((b-a+7)^2)$	***6***	4	0	4

Cum **$U((b-a+7)^2)$** trebuie să fie 6 $\Rightarrow$ singura soluție ar putea fi :
a=2; b=9 $\Rightarrow 11^2 + (9-2+7)^2 = 121 + 196 = 317 \neq 297 \Rightarrow$ a+b=11 nu convine

In concluzie, **$U((a+b)^2)$ =1 nu convine .** $\boxed{\textbf{2p}}$

II) Dacă $U((a+b)^2) = 6 \Rightarrow a+b \in \{4;6;14;16\}$ $\boxed{\textbf{1p}}$

II.1. a+b=4, b>a $\Rightarrow$

b	3
a	1
b-a+7	9
$U((b-a+7)^2)$	1

a=1;b=3 $\Rightarrow 4^2 + 9^2 = 16+81=97 \neq 137 \Rightarrow$ a+b=4 nu convine

II.2. a+b=6, b>a $\Rightarrow$

b	5	4

a	1	2
b-a+7	11	9
U((b-a+7)^2)	1	1

1. **a=1; b=5 $\Rightarrow$ 6^2+ 11^2 = 36+121 = 157 - este soluție (1)**
2. **a=2 ; b=4 $\Rightarrow$ 6^2+ 9^2 = 36 + 81 = 117 $\neq$ 247**

Deci, pentru a+b=6, singura soluție este a=1; b=5 $\boxed{\textbf{1p}}$

II.3 a+b=14, b>a $\Rightarrow$

b	9	8
a	5	6
b-a+7	11	9
U((b-a+7)^2)	1	1

1. **a=5 ; b= 9 $\Rightarrow$ 14^2 + 11^2 = 196 + 121 = 317** $\neq$ 597
2. **a=6 ; b=8 $\Rightarrow$ 14^2 + 9^2 = 196 + 91 = 287** $\neq$ 687

$\Rightarrow$ **a+b=14** nu convine

II.4 a+b=16 , b>a $\Rightarrow$

b	9
a	7
b-a+7	9
U((b-a+7)^2)	1

a= 7 ; b= 9 $\Rightarrow$ 16^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337 $\neq$ 797 , deci a+b=16 nu convine $\boxed{\textbf{1p}}$

In concluzie, unica soluție este a=1 ; b=5 $\Rightarrow$ $(1+5)^2$+ $(5-1+7)^2$ =6^2+11^2= 36+121 = 157 $\boxed{\textbf{1p}}$

Obs: Orice altă soluție corectă va fi punctată în mod corespunzător