Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie S suma elementelor inversabile ale unui inel finit. Arătaţi că $S^2 = S$ sau $S^2 = 0$.

Problema 2. Fie G un grup cu proprietatea că dacă $a, b \in G$ şi $a^2 b = b a^2$, atunci $ab = ba$.

(i) Dacă G are 2^n elemente, arătaţi că G este abelian.

(ii) Daţi un exemplu de grup neabelian care are proprietatea din enunţ.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $a < c < b$ trei numere reale şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în c. Arătaţi că dacă f are primitive pe fiecare dintre intervalele $[a, c)$ şi $(c, b]$, atunci f are primitive pe intervalul $[a, b]$.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1)$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi $f'(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

(i) Demonstraţi că funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x) - x$ este strict descrescătoare.

(ii) Arătaţi că pentru orice număr întreg $n \geq 1$ avem

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.