Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A XI-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Arătaţi că orice funcţie continuă de forma

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & \text{pentru } x \le 1 \\ a_2x + b_2, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = m_1x + n_1 + \varepsilon|m_2x + n_2|, \text{ pentru } x \in \mathbb{R},$$

unde $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{R}$, iar $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Soluţie. Continuitatea se reduce la cea în punctul $x = 1$, de unde $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ ....**1 punct**

Pentru $a_1 = a_2$ rezultă $b_1 = b_2$ şi putem lua $m_1 = a_1 = a_2$, $n_1 = b_1 = b_2$, $m_2 = n_2 = 0$, $\varepsilon = \pm 1$. Altfel, rezultă că expresia de sub modul trebuie să se anuleze în $x = 1$, deci $m_2x + n_2 = A(x - 1)$ .... **1 punct**

Prin explicitarea modulului şi identificarea ramurilor pentru $x \le 1$ şi respectiv $x > 1$, deducem egalităţile $m_1 - \varepsilon|A| = a_1$, $n_1 + \varepsilon|A| = b_1$, şi $m_1 + \varepsilon|A| = a_2$, $n_1 - \varepsilon|A| = b_2$ ....**2 puncte**

Deducem $m_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $n_1 = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$, şi $2\varepsilon|A| = a_2 - a_1 = b_1 - b_2$, unde ε se alege $+1$ sau -1 după cum expresia din dreapta este pozitivă, respectiv negativă. În fine, luăm $m_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{2}$, $n_2 = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$, deci

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2}{2}x + \frac{b_1 + b_2}{2} + \operatorname{sign}(a_2 - a_1)\left|\frac{a_1 - a_2}{2}x + \frac{a_2 - a_1}{2}\right|.$$

Condiţia de continuitate asigură compatibilitatea soluţiei ....**3 puncte**

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $A = -{}^tA$, $B = {}^tB$. Arătaţi că dacă funcţia polinomială definită prin

$$f(x) = \det(A + xB)$$

are o rădăcină dublă, atunci $\det(A + B) = \det B$.

Prin ${}^tX$ s-a notat transpusa matricei X.

Soluţie. f este un polinom de grad cel mult trei cu coeficienţi complecşi ....**1 punct**

Avem $f(x) = \det{}^t(A+xB) = \det(-A+xB) = -\det(A-xB) = -f(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$, deci f este funcţie impară ....**2 puncte**

Avem şi $f(x) = (\det B)x^3 + ax^2 + bx + \det A$, ... **1 punct**
iar cum f este impară, rezultă că $a = \det A = 0$, deci $f(x) = (\det B)x^3 + bx$ .... **1 punct**

Deoarece o rădăcină este dublă rezultă $b = 0$. Deci $f(x) = (\det B)x^3$, prin urmare $f(1) = \det B$, şi atunci $\det(A + B) = \det B$ .... **2 puncte**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strict crescătoare astfel încât $f \circ f$ este continuă. Arătaţi că f este continuă.

Gazeta Matematică

Soluţie. Cum f este monotonă, limitele laterale în fiecare punct există şi sunt finite. Notăm cu $f(x_0-)$, respectiv $f(x_0+)$, limita la stânga, respectiv la dreapta, a lui f în punctul x_0 .... **1 punct**

Cum f este crescătoare, în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ avem $f(x_0-) \leq f(x_0)$ şi din monotonia lui f avem şi $f(f(x_0-)) \leq f(f(x_0))$ .... **1 punct**

Pe de altă parte, $f(x) \leq f(x_0-)$ pentru $x < x_0$, deci şi inegalitatea $f(f(x)) \leq f(f(x_0-))$, pentru $x < x_0$, şi deoarece $f \circ f$ este continuă

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(f(x)) = f(f(x_0)),$$

de unde la limită deducem $f(f(x_0)) \leq f(f(x_0-))$ .... **2 puncte**

Rezultă $f(f(x_0)) = f(f(x_0-))$. Cum f e strict monotonă (deci injectivă) rezultă $f(x_0) = f(x_0-)$, adică f este continuă la stânga .... **2 puncte**

Analog (sau simultan) se trateaza continuitatea la dreapta .. **1 punct**

Problema 4. Demonstraţi că există şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_n \in \{-1, +1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + a_1} + \sqrt{n + a_2} + \cdots + \sqrt{n + a_n} - n\sqrt{n + a_0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Evident, trebuie să alegem $a_0 = -1$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ să notăm cu k_n numărul de termeni egali cu $+1$ din secvenţa $a_1, a_2, \ldots, a_n$, restul fiind egali cu -1. Şirul a cărui limită o căutăm a fi $\frac{1}{2}$, fie el notat x_n, devine

$$x_n = k_n\sqrt{n + 1} - k_n\sqrt{n - 1}.$$

.... **1 punct**

Prin raţionalizare, avem

$$x_n = \frac{2k_n}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n - 1}} = \frac{2\frac{k_n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

.... **1 punct**

Rămâne să construim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$ .. **1 punct**

Să alegem $a_n = +1$ dacă şi numai dacă $n = (2m)^2$, cu $m \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $(2k_n)^2 \le n < (2(k_n+1))^2$. De aici rezultă

$$\frac{\sqrt{n}}{2} - 1 < k_n \le \frac{\sqrt{n}}{2},$$

ceea ce asigură condiţia din limita de mai sus .... **4 puncte**

Observaţie. Se vor acorda până la 3 puncte pentru construcţia unor subşiruri ale lui x_n ce satisfac condiţia.

Remarcă. La fel se demonstrează că pentru orice $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ există un şir $(a_n)_{n\ge 0}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Presupunem mai întâi $0 < \ell < +\infty$ şi luăm $a_0 = -1$, ca mai sus.

Pentru a construi şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n}{\sqrt{n}} = \ell$, alegem $a_n = +1$ dacă şi numai dacă $n = \left\lfloor \left(N + \dfrac{m}{\ell}\right)^2 \right\rfloor$, cu $m \in \mathbb{N}^*$ şi N fixat, suficient de mare pentru ca aceste valori să fie distincte. Atunci, pentru $n \to \infty$, obţinem rezultatul dorit în limita de mai sus.

Pentru $\ell = 0$ putem lua toţi a_n egali; pentru $\ell = +\infty$ putem lua $a_0 = -1$ şi toţi $a_n = +1$ pentru $n \ge 1$ (şi, similar, pentru $\ell = -\infty$ putem lua $a_0 = +1$ şi toţi $a_n = -1$ pentru $n \ge 1$). În fine, pentru $-\infty < \ell < 0$, luăm $a_0 = +1$ şi procedăm exact ca mai sus.