Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a XI-a

Problema 1. Arătaţi că orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & \text{pentru } x \leq 1 \\ a_2 x + b_2, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = m_1 x + n_1 + \varepsilon |m_2 x + n_2|, \text{ pentru } x \in \mathbb{R},$$

unde $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{R}$, iar $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $A = -{}^tA$, $B = {}^tB$. Arătaţi că dacă funcţia polinomială definită prin

$$f(x) = \det(A + xB)$$

are o rădăcină multiplă, atunci $\det(A + B) = \det B$.

Prin ${}^tX$ s-a notat transpusa matricei X.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strict crescătoare astfel încât $f \circ f$ este continuă. Arătaţi că f este continuă.

Gazeta Matematică

Problema 4. Demonstraţi că există şiruri $(a_n)_{n \geq 0}$ cu $a_n \in \{-1, +1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n + a_1} + \sqrt{n + a_2} + \cdots + \sqrt{n + a_n} - n\sqrt{n + a_0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.