Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A X-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Demonstraţi următoarele egalităţi de mulţimi

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 [x] = [\log_2 x]\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)\,.$

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^{[x]} = [2^x]\right\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [m,\ \log_2 (2^m + 1))\,.$

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Soluţie.
(i) Dacă $[\log_2 x] = m$, atunci $2^m \le x < 2^{m+1}$ .... **1 punct**
Din $\log_2 [x] = m$, rezultă $[x] = 2^m$, apoi $2^m \le x < 2^m + 1$ ... **1 punct**
Pentru $x \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)$, avem $[\log_2 x] = \log_2 [x] = m$ .. **1 punct**
(ii) Dacă $[2^x] = t \in \mathbb{N}$, atunci $\log_2 t \le x < \log_2 (t+1)$ .... **1 punct**
Din $2^{[x]} = t$, rezultă $[x] = \log_2 t = m \in \mathbb{N}$, apoi rezultă şi $m \le x < \log_2 (2^m + 1)$ .... **2 puncte**
Reciproc, pentru $x \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [m,\ 2^m + 1)$, avem $[2^x] = 2^{[x]} = m$ **1 punct**

Problema 2. Fie $a \in [-2, \infty)$, $r \in [0, \infty)$ şi numărul natural $n \ge 1$. Arătaţi că

$$r^{2n} + ar^n + 1 \ge (1 - r)^{2n}\,.$$

Gazeta Matematică

Soluţie.
Prin împărţire cu r^{2n}, se obţine o inegalitate similară în $1/r$; se poate deci presupune că $r \in (0, 1)$ (cazul $r = 0$ este trivial) .... **2 puncte**
$r^{2n} + ar^n + 1 \ge r^{2n} - 2r^n + 1 = (1 - r^n)^2$, ... **2 puncte**
deci este suficient să arătăm că $1 - r^n \ge (1 - r)^n$, ... **1 punct**
dar $r^n + (1 - r)^n \le r + (1 - r) = 1$ .... **2 puncte**

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$3f\left(f\left(f\left(n\right)\right)\right) + 2f\left(f\left(n\right)\right) + f\left(n\right) = 6n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Soluţie.
Funcţia f este injectivă .... **1 punct**
Pentru $n = 0$, obţinem

$3f(f(f(0))) + 2f(f(0)) + f(0) = 0$, deci $f(0) = 0$ .... **1 punct**
Presupunem $f(0) = 0$, $f(1) = 1, \ldots, f(n) = n$ .... **1 punct**
Din injectivitate, $f(n+1) \geq n+1$ .... **1 punct**
şi $f(f(n+1)) \geq n+1$, $f(f(f(n+1))) \geq n+1$ .... **1 punct**
dar $3f(f(f(n+1))) + 2f(f(n+1)) + f(n+1) = 6n+6$ .. **1 punct**
Finalizare, $f(n) = n$, oricare ar fi n .... **1 punct**

Problema 4. Fie şirul $a_n = \left| z^n + \dfrac{1}{z^n} \right|$, $n \geq 1$, unde $z \in \mathbb{C}^*$ este dat.

(i) Demonstraţi că dacă $a_1 > 2$, atunci

$$a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) Demonstraţi că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k \leq 2$, atunci $a_1 \leq 2$.

Soluţie.
(i) $2\left|z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right| < \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right|$ .... **1 punct**
$= \left|z^n + \frac{1}{z^n} + z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right| \leq \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| + \left|z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right|$ ...... **2 puncte**
(ii) Presupunem prin absurd $a_1 > 2$. Conform cu **(i)**, şirul $a_{n+1} - a_n$ este strict crescător .... **1 punct**
$a_{n+1} - a_n > a_2 - a_1 = \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| - \left|z + \frac{1}{z}\right|$ .... **1 punct**
$\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| > \left|z + \frac{1}{z}\right|$, deoarece $2\left|z + \frac{1}{z}\right| < \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left|z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right| \leq \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + 2 < \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + \left|z + \frac{1}{z}\right|$ .... **1 punct**
Şirul a_n este strict crescător, deci $a_k \geq a_1 > 2$, contradicţie . **1 punct**