Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a X-a

Problema 1. Demonstraţi următoarele egalităţi de mulţimi

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 [x] = [\log_2 x]\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)\,.$

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^{[x]} = [2^x]\right\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [m,\ \log_2 (2^m + 1))\,.$

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Problema 2. Fie $a \in [-2, \infty)$, $r \in [0, \infty)$ şi numărul natural $n \geq 1$. Arătaţi că

$$r^{2n} + ar^n + 1 \geq (1 - r)^{2n}\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$3f\left(f\left(f\left(n\right)\right)\right) + 2f\left(f\left(n\right)\right) + f\left(n\right) = 6n,\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Problema 4. Fie şirul $a_n = \left|z^n + \dfrac{1}{z^n}\right|$, $n \geq 1$, unde $z \in \mathbb{C}^*$ este dat.

(i) Demonstraţi că dacă $a_1 > 2$, atunci

$$a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2},\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) Demonstraţi că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k \leq 2$, atunci $a_1 \leq 2$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.