Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a IX-a

Problema 1. O dreaptă care trece prin centrul I al cercului înscris unui triunghi ABC taie laturile AB şi AC în P, respectiv Q. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $\dfrac{PB}{PA} = p$, $\dfrac{QC}{QA} = q$.

(i) Arătaţi că $a(1+p)\overrightarrow{IP} = (a - pb)\overrightarrow{IB} - cp\overrightarrow{IC}$.

(ii) Arătaţi că $a = bp + cq$.

(iii) Arătaţi că dacă $a^2 = 4bcpq$, atunci dreptele AI, BQ şi CP sunt concurente.

Problema 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi toate numerele naturale p pentru care

$$s_p = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_p$$

este o putere cu exponent natural a lui 2.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie x un număr real. Arătaţi că x este număr întreg dacă şi numai dacă relaţia

$$[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx] = \frac{n\left([x] + [nx]\right)}{2}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$f(n) + f(n+1) + f(f(n)) = 3n + 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.